

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

*СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ МАТЕМАТИКИ*



ВЫПУСК

8

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО
1986

МАТЕМАТИЧЕСКОЕ ПРОСВЕЩЕНИЕ

СБОРНИК СТАТЕЙ ПО ЭЛЕМЕНТАРНОЙ
МАТЕМАТИКЕ И НАЧАЛАМ ВЫСШЕЙ

ПОД РЕДАКЦИЕЙ
Р. Н. БОНЧКОВСКОГО

ВЫПУСК ВОСЬМОЙ

ОБЪЕДИНЕННОЕ
НАУЧНО-ТЕХНИЧЕСКОЕ ИЗДАТЕЛЬСТВО НКТП СССР
ГЛАВНАЯ РЕДАКЦИЯ ТЕХНИКО-ТЕОРЕТИЧЕСКОЙ ЛИТЕРАТУРЫ
МОСКВА 1936 ЛЕНИНГРАД

АДРЕС РЕДАКЦИИ

Москва, Центр, Комсомольский пер., 6, ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы и монографии.

Сборник содержит оригинальные статьи по элементарной математике и простейшим вопросам высшей математики, задачи и библиографию по этим дисциплинам и т. д.

Сборники рассчитаны на весьма широкий круг читателей: наиболее сильные учащиеся средней школы, студенты техникумов, вузов и втузов, преподаватели школ, техникумов и частично вузов (особенно педвузов) найдут в них интересный материал для чтения.

Сборники «Математическое просвещение» продаются во всех книжных магазинах ОНТИ. В случае отсутствия сборников в магазинах, их можно выписать наложенным платежом. Заказы направлять по адресу: Москва, Третьяковский проезд, д. № 1, «Техкнига-почтой» или: Москва, ул. Кирова, 6, книжный магазин ОНТИ, № 1, «Книга-почтой».

Редакция *Р. Н. Бончковского*. Оформление *С. Л. Дыман*.
Корректурa *К. С. Цветковой*. Наблюдал за выпуском *В. Т. Тимофеев*.
Сдано в производство 5/II 1936 г. Подписано к печати 18 июля 1936 г.
Количество бум. листов $2\frac{1}{4}$. Тираж 5000. Формат $62 \times 94\frac{1}{16}$. Колич. печ.
знаков в 1 бум. листе 107 712. Уч.-авторских листов 5,5.
Заказ № 186. Гл. ред. общ. литер. № 12. Уполн. Главлита № В—43258.

О ЗАКОНЕ СИНУСОВ ДЛЯ СФЕРИЧЕСКОГО ТРЕУГОЛЬНИКА

(Отрывок из книги „*De triangulis omnimodis*“)

Региомонтан (Иоганн Мюллер)
(К 500-летию со дня рождения)

Иоганн Мюллер, известный под именем Региомонтана (*Regiomontanus* есть латинский перевод имени его родного города Кенигсберга), первый написал учебную книгу, целиком посвященную тригонометрии. Она появилась в рукописи около 1464 г. и носила название „*De triangulis omnimodis libris quinque*“ („5 книг о треугольниках всякого рода“); первое печатное издание этой книги относится к 1533 г.

Приводимый ниже отрывок из этой книги, посвященный теореме синусов для сферических треугольников, открытой по всей вероятности самим Региомонтаном, позволяет судить о полноте этого сочинения.

В каждом прямоугольном треугольнике отношение синуса каждой стороны к синусу угла, на нее опирающегося, есть величина постоянная ¹⁾.

Пусть дан треугольник abg , у которого угол b прямой. Я утверждаю, что отношение синуса стороны ab к синусу угла agb равно отношению синуса стороны bg к синусу угла bag , и мы это докажем следующим образом.

Неизбежно, что или каждый из углов a и g прямой, или один из них прямой, или ни один из них не прямой. Если каждый из них есть прямой угол, тогда, согласно предположению, точка a есть полюс круга bg , и, кроме того, точка b есть полюс круга ag , и точка g есть полюс круга ab . Таким образом, по определению, каждая из трех дуг будет давать величину соответствующего угла. Следовательно, синус каждой из трех сторон будет равен синусу противоположного угла, а потому отношение синуса каждой стороны к синусу соответствующего угла остается одинаковым, причем это отношение есть равенство.

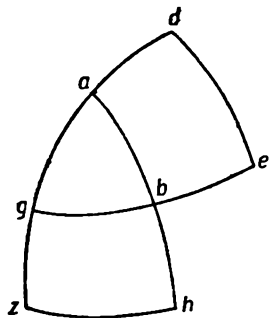
Если же только один из углов a и g прямой, то пусть прямым будет угол g . Так как мы предположили, что и угол b прямой, то при этих данных точка a есть полюс круга bg , и каждая из дуг ba и ag есть четверть большого круга. Тогда, по определению, каждая из дуг ab , bg и ga будет определять величину соответствующего угла, что следует из самого определения угла. Отсюда становится очевидным, что отноше-

¹⁾ *De triangulis omnimodis*, книга IV, XVI, стр. 103—105, Нюрнберг 1533.

ние синуса любой стороны к синусу противоположного угла постоянно, причем это отношение есть равенство.

Если же ни один из углов a и g не прямой, то ни одна из трех сторон не будет квадрантом большого круга, и они могут оказаться в тройном разнообразии [т. е. возможны три случая ¹⁾].

Если оба угла a и g острые, каждая из дуг ab и bg будет меньше квадранта, а потому и дуга ag будет меньше четверти большого круга. Тогда продолжим дугу ga в сторону точки a настолько, чтобы она стала квадрантом gd , и, взяв хорду — сторону большого вписанного квадрата — в качестве радиуса и точку g в качестве центра, опишем большой круг, пересекающий продолжение дуги gb в точке e . Наконец, продолжим дугу ga до точки z , чтобы получить квадрант az ; а хорда этого квадранта, будучи повернутой около полюса a , опишет круг, пересекающий продолжение дуги ab в точке h . Мы даем чертеж, иллюстрирующий эти условия (фиг. 1).



Фиг. 1.

Если же оба угла a и g тупые, то каждая из дуг ab и gb будет больше квадранта, и мы знаем, что дуга ag меньше квадранта. Тогда, продолжая дугу ag , как и раньше, в обе стороны, до получения четверти большого круга gd , а также az , опишем два больших круга с центрами в точках g и a .

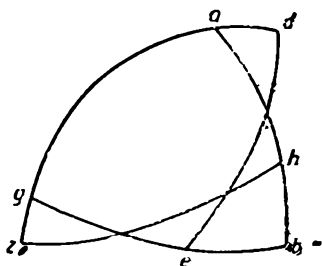
Окружность круга, описанного около точки g , непременно пересечет дугу gb , которая больше квадранта. Пусть это случится в точке e . Другой круг, описанный около точки a , пересечет дугу ab в точке h . Таким образом получится фигура 2.

Если же один из углов a и g тупой, а другой острый, то пусть a будет тупым, а другой — острым. Тогда, подобно предыдущему, каждая из дуг bg и ga больше квадранта, а дуга ab меньше квадранта. Тогда выделим на дуге ag два квадранта gd и az , имеющие общей частью дугу dz . Окружность круга, описанного около точки g как полюса, пересечет дугу bg , которая больше квадранта; пусть точкой пересечения будет e . Далее, окружность круга, описанного около точки a , не пересечет дуги ab , так как эта последняя дуга меньше квадранта, но пересечет ее, если ее достаточно продолжить, например, в точке h (фиг. 3). Поэтому, когда ни один из углов a и g не прямой, мы хотя и вынуждены пользоваться тремя чертежами, все же ход рассуждений (силлогизм) получится во всех трех случаях один и тот же.

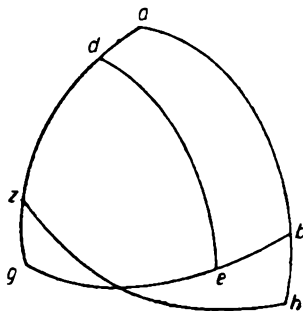
Так как два круга gd и ge встречаются под углом (буквально „наклонены один к другому“) и так как на окружности круга gd имеются две точки с перпендикулярами ab и de , выходящими из этих точек, то

¹⁾ Или все три стороны будут меньше квадранта, или ab и bg больше и ag меньше квадранта; или же bg и ag будут больше квадранта и ab меньше. Любопытно заметить, что Региомонтан в своих чертежах употребляет буквы в том порядке, в каком они идут в греческом алфавите; этот факт, очевидно, объясняется его постоянной работой над греческими классиками.

согласно предыдущему доказательству ¹⁾ отношение синуса дуги ga к синусу дуги ab равно отношению синуса дуги gd к синусу дуги de , или, перемещая члены пропорции, отношение синуса ga к синусу gd равно отношению синуса ab к синусу de .



Фиг. 2.



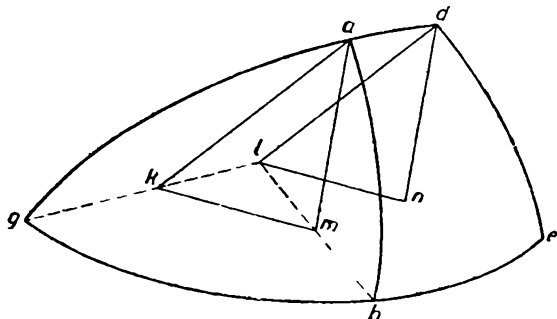
Фиг. 3.

Подобным же образом, два круга az и ah пересекаются под углом, и на окружности круга az имеются две точки g и z , из которых опущены две перпендикулярные дуги gb и zh . А потому согласно предыдущим теоремам, отношение синуса ag к синусу gb равно отношению синуса az к синусу zh и, изменяя порядок, синус ag относится к синусу az , как синус gb — к синусу zh .

Кроме того, синус ag относится к синусу az , как синус ga к синусу gd . Каждая из дуг az и gd есть квадрант. Следовательно, синус стороны ab относится к синусу de , как синус стороны gb — к синусу zh , и таково же отношение синуса стороны ag к синусу квадранта. Далее, синус de есть синус угла agh , так как дуга de служит мерой угла agb с точкой g как полюсом круга de . Подобным же образом, синус zh есть синус угла bag . Наконец, синус квадранта есть синус прямого угла;

¹⁾ К сожалению, мы не имели в руках полного текста книги Региомонтана, поэтому нам неизвестно, какое именно предыдущее доказательство он имеет в виду. Возможно, что он говорит о следующем: из точек a и d опустим перпендикуляры dk и dl на диаметр сферы, проходящий через точку g , и перпендикуляры am и dn на плоскость круга gbt ; основания этих перпендикуляров соединяем отрезками km и ln .

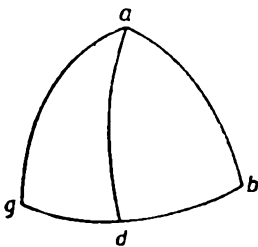
Треугольники akt и dln подобны, так как их стороны попарно параллельны. Поэтому ak так относится к am , как ld к dn . Но ak есть синус дуги ag , am — синус дуги ab , ld — синус дуги ad , dn — синус дуги de . Следовательно, синус дуги ag так относится к синусу угла ab , как синус дуги ad — к синусу угла de .



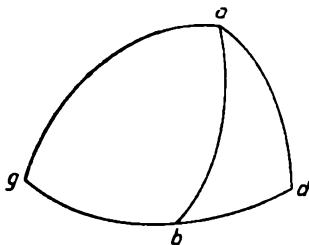
следовательно, отношение синуса стороны ab к синусу угла agb и отношение синуса стороны bg к синусу угла bag , а также отношение синуса стороны ag к синусу прямого угла abg будут одинаковы, что и требовалось доказать.

В любом треугольнике, непрямоугольном, синусы сторон пропорциональны синусам противолежащих углов.

Теорема, которая была доказана для прямоугольных треугольников, может быть доказана и для непрямоугольных треугольников. Пусть треугольник abg не имеет вовсе прямого угла. Я утверждаю, что отношение синуса стороны ab к синусу угла g и отношение синуса стороны bg к синусу угла a , и отношение синуса стороны ga к синусу угла b — равны между собой.



Фиг. 4.



Фиг. 5.

Опустим перпендикуляр ad из точки a , который пересечет дугу bg , если он остается внутри треугольника, или же встретит продолжение дуги bg , если он окажется вне треугольника, причем этот перпендикуляр не может иметь общего конца ни с ab , ни с ag , так как в этом случае один из углов b и g оказался бы прямым углом, что противоречит нашему предположению. Поэтому пусть он — берем первый случай — падает внутри треугольника, разбивая его на два треугольника abd и agd (фиг. 4). Согласно предыдущему доказательству, только с перестановкой членов отношение синуса ab к синусу ad равно отношению синуса угла adb , прямого угла, к синусу угла abd . Но согласно этому же доказательству отношение синуса ad к синусу ag равно отношению синуса угла agd к синусу прямого угла adg , на основании того, что синус угла adg равен синусу угла adb и что каждый из них прямой. Отсюда следует, что синус ab относится к синусу ag , как синус угла agb — к синусу угла abg ; и, изменяя порядок, синус стороны ab относится к синусу угла agb , как синус стороны ag — к синусу угла abg .

Наконец, можно заключить, что отношение синуса стороны bg к синусу угла bag равно указанным прежде отношениям, если из одной из указанных вершин b или g опустить дугу, перпендикулярную к противоположной стороне.

Если же перпендикуляр ad окажется вне треугольника, вследствие чего чертеж несколько изменится (фиг. 5), то мы опять постараемся получить тот же результат, так как, видоизменяя предыдущее доказа-

тельство, получим, что синус ab будет относиться к синусу ad , как синус прямого угла adb относится к синусу угла abd .

Подобным же образом синус ad относится к синусу ag , как синус угла agb относится к синусу прямого угла adg . Следовательно, синус стороны ab относится к синусу стороны ag , как синус угла agb относится к синусу угла abd .

Кроме того, синус угла abd равен синусу угла abg , как всем известно. Следовательно, синус ab относится к синусу ag , как синус угла agb — к синусу угла abd , а потому также, перемещая члены, синус стороны ab относится к синусу угла abg , как синус стороны ag относится к синусу угла abg . Наконец, мы докажем, что тому же равно отношению синуса стороны bg к синусу угла bag , и это докажется тем же способом, каким мы выше пользовались. Следовательно, положение, которое было доказано в этих теоремах для прямоугольных и непрямоугольных треугольников, может быть теперь установлено нами вообще по поводу треугольников любого типа, и мы увидим шаг за шагом те обильные и приятные плоды, которые принесет нам это изучение ¹⁾.

О СВОЙСТВАХ ПРАВИЛЬНЫХ МНОГОУГОЛЬНИКОВ

С. И. Зетель (Москва)

1. В настоящей статье я докажу теорему: Сумма расстояний от произвольной точки описанной окружности до четных вершин правильного многоугольника равна сумме расстояний до его нечетных вершин. Теорема справедлива только для многоугольника с нечетным числом сторон. Для двух частных случаев эта теорема известна. Для треугольника в курсе геометрии Бальцера (Baltzer) приводятся два интересных доказательства. Для пятиугольника доказательство дано в журнале „Nouvelles Annales de Mathématiques“ за 1876 г. Как следствие из доказанной мною теоремы получается формула для вычисления суммы длин диагоналей сначала для многоугольника с нечетным числом сторон, а затем и для многоугольника с четным числом сторон.

Рассмотрим два частных случая.

Пусть в треугольнике ABC $AB = BC = AC = a$ и M — произвольная точка на описанной окружности (фиг. 1). Применим теорему Птолемея к четырехугольнику $AMBC$:

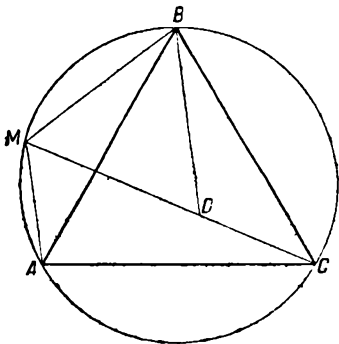
$$MC \cdot a = MB \cdot a + MA \cdot a,$$

$$MC = MB + MA.$$

¹⁾ Подлинник на латинском языке. Извлечено из книги „A source book im Mathematics“ by D. E. Smith, Нью-Йорк, 1929, перевод с английского И. А.

Теорема для треугольника доказана. Она может быть сформулирована так: расстояние от произвольной точки окружности до одной из вершин вписанного правильного треугольника равно сумме расстояний до двух других вершин.

Другое доказательство, приводимое Бальцером, основано только на равенстве треугольников. Пусть $MB > MA$. Отложим на отрезке MC отрезок $MD = MB$ и соединим точку D с B . Треугольник MBD равносторонний, так как $MB = MD$ и угол $BMD = 60^\circ$. Следовательно, $MB = BD = MD$; $\angle BDC = 120^\circ$; $\angle BDC = \angle BMA$; $\triangle BDC = \triangle BMA$. Из равенства треугольников следует, что $AM = DC$. Теорема доказана.



Фиг. 1.

Поставим следующую задачу: найти на окружности круга, описанного около произвольного треугольника, точку, расстояние которой от одной вершины равно сумме расстояний от двух других вершин.

Пусть z — расстояние точки M до вершины C — равно сумме расстояний x и y до вершин A и B . На основании теоремы Птоломея имеем:

$$\begin{aligned} ax + by &= cz = c(x + y), \\ (c - a)x &= (b - c)y, \\ \frac{c - a}{b - c} &= \frac{y}{x}. \end{aligned}$$

Итак, расстояния, от искомой точки окружности до вершин A и B должны быть пропорциональны соответственно $(c - a)$ и $(b - c)$ при условии, что $b > c > a$. Построив геометрическое место точек, отношение расстояний которых до точек A и B соответственно равно $(c - a) : (b - c)$, найдем в пересечении этого геометрического места (окружности) с данной окружностью две точки. Из этих точек искомой будет точка, лежащая с вершиной C по разные стороны от хорды AB .

Интересен частный случай: $c - a = b - c$. Стороны треугольника составляют арифметическую прогрессию. В этом случае $x = y = \frac{z}{2}$.

Найденное нами свойство треугольника, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, позволяет легко решить следующую задачу: вписать в круг треугольник, стороны которого составляют арифметическую прогрессию, если средняя по величине сторона дана.

Восставив из середины данной стороны перпендикуляр до пересечения с дугой, меньшей 180° , стягиваемой данной стороной, найдем точку, удаленную от каждого из концов данной хорды на расстояние, равное x . Засекая из этой точки окружность радиусом, равным $2x$, найдем третью вершину искомого треугольника.

Задача допускает два решения, если данная хорда менее $R\sqrt{3}$. Задача возможна, если данная хорда не больше $R\sqrt{3}$.

2. Для пятиугольника доказательство, приводимое в „Nouvelles Annales de Mathématiques“, заключается в следующем:

Пусть $ABCDE$ — правильный пятиугольник, M — произвольная точка на окружности, описанной около пятиугольника, и $AF \parallel MD$ (фиг. 2).

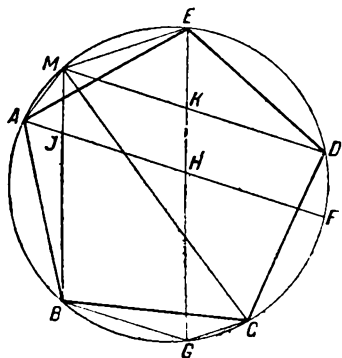
$$\angle MAI = \sphericalangle ME + \sphericalangle ED + \sphericalangle DF = \frac{1}{2} \sphericalangle MEDF = \frac{1}{2} \sphericalangle AMED,$$

$$\angle AIM = \frac{1}{2}(\sphericalangle AM + \sphericalangle BCF) = \frac{1}{2} \sphericalangle BCFD.$$

Так как $\sphericalangle AMED = \sphericalangle BCFD$ (каждая из этих дуг равна $\frac{2}{5}$ окружности) то, следовательно, $\angle MAI = \angle AIM$, $IM = AM$.

Проведем EG параллельно MB ; имеем $BG = ME$; $GC = AM = DF$. Углы MEK и EKM равны между собой, так как каждый из них измеряется половиной дуги, равной $\frac{2}{5}$ окружности. Следовательно, $ME = MK$.

Четырехугольники $HIBG$, $HIMK$, $HFDK$ — параллелограммы. Доказательство того, что



Фиг. 2.

$$MB + MD = MA + MC + ME,$$

сводится к доказательству того, что

$$(KH + HG) + (IH + HF) = MA + MC + ME.$$

Так как $ME = HI$, $MA = HK$, то остается показать, что

$$HG + HF = MC.$$

Треугольник EHF равнобедренный, так как каждая из дуг AE и GF равна $\frac{1}{5}$ окружности. Следовательно,

$$HG + HF = EG;$$

но

$$EG = MC,$$

так как хорды EG и MC стягивают равные дуги $EDCG$ и $CBAM$. Итак, теорема доказана.

3. Предлагаемое мною доказательство теоремы для многоугольника с нечетным числом сторон основано на суммировании синусов углов, составляющих арифметическую прогрессию:

$$S = \sin \varphi + \sin (\varphi + \alpha) + \sin (\varphi + 2\alpha) + \dots + \sin [\varphi + (n-1) \alpha].$$

Обозначим через S_1 сумму всех расстояний до нечетных вершин; имеем:

$$S_1 = 2R \left[\sin \frac{\varphi}{2} + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + 2\alpha \right) + \dots + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + n\alpha \right) \right].$$

Каждое из рассматриваемых слагаемых положительно. Действительно, наибольший из углов $\frac{\varphi}{2} + n\alpha < \pi$, так как

$$\frac{\varphi}{2} + n\alpha < \frac{\alpha}{2} + n\alpha = \frac{2n+1}{2} \alpha = \pi.$$

По формуле предыдущего параграфа получаем:

$$S_1 = 2R \frac{\sin \frac{(n+1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2}.$$

Так как

$$\frac{(n+1)\alpha}{2} + \frac{n\alpha}{2} = \frac{(2n+1)\alpha}{2} = \pi,$$

то

$$\frac{(n+1)\alpha}{2} = \pi - \frac{n\alpha}{2}; \quad \sin \frac{(n+1)\alpha}{2} = \sin \frac{n\alpha}{2}.$$

Далее, так как

$$\frac{n\alpha}{2} + \frac{\alpha}{4} = \frac{\pi}{2},$$

то

$$\sin \frac{n\alpha}{2} = \cos \frac{\alpha}{4}.$$

Следовательно,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2R \cos \frac{\alpha}{4}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2} = \frac{2R \cos \frac{\alpha}{4}}{2 \sin \frac{\alpha}{4} \cos \frac{\alpha}{4}} \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2} = \\ &= \frac{R \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{4}}. \end{aligned}$$

Определим S_2 — сумму расстояний до четных вершин. Расстояние MB до первой четной вершины:

$$MB = 2R \sin \frac{\varphi + \alpha}{2};$$

до второй:

$$MD = 2R \sin \frac{\varphi + 3\alpha}{2};$$

и т. д.

$$\begin{aligned} S_2 &= 2R \left\{ \sin \frac{\varphi + \alpha}{2} + \sin \frac{\varphi + 3\alpha}{2} + \sin \frac{\varphi + 5\alpha}{2} + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[\frac{\varphi + \alpha}{2} + (n-1)\alpha \right] \right\} = \\ &= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(\frac{\varphi + \alpha}{2} + \frac{n-1}{2}\alpha \right) = \\ &= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2} = R \frac{\sin \frac{\varphi + n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{4}}. \end{aligned}$$

Итак, $S_1 = S_2$.

5. Рассмотрим многоугольник с четным числом сторон. Пусть число сторон его равно $2n$, где n — целое число. Сохраняя те же обозначения, найдем:

$$\begin{aligned} S_1 &= 2R \left\{ \sin \frac{\varphi}{2} + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \alpha \right) + \sin \left(\frac{\varphi}{2} + 2\alpha \right) + \dots + \right. \\ &\quad \left. + \sin \left[\frac{\varphi}{2} + (n-1)\alpha \right] \right\} = \\ &= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \left(\frac{\varphi}{2} + \frac{n-1}{2}\alpha \right) = 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi + (n-1)\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Так как $2n\alpha = 2\pi$, то $\frac{n\alpha}{2} = \frac{\pi}{2}$. Следовательно,

$$\begin{aligned} S_1 &= \frac{2R}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi + (n-1)\alpha}{2} = \frac{2R \sin \frac{\varphi + (n-1)\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}, \\ S_2 &= 2R \left[\sin \frac{\varphi + \alpha}{2} + \sin \frac{\varphi + 3\alpha}{2} + \dots + \sin \frac{\varphi + \alpha + 2(n-1)\alpha}{2} \right] = \\ &= 2R \frac{\sin \frac{n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}} \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2}. \end{aligned}$$

Принимая во внимание, что $\sin \frac{n\alpha}{2} = 1$, получаем:

$$S_2 = \frac{2R \sin \frac{\varphi + n\alpha}{2}}{\sin \frac{\alpha}{2}}.$$

Итак, $S_2 \neq S_1$.

6. Интересен частный случай, когда выбранная нами точка M совпадает с одной из вершин многоугольника. В этом случае $\varphi = 0$.

Для многоугольника с нечетным числом сторон получим:

$$S_1 = S_2 = R \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{4}} = R \frac{\cos \frac{a}{4}}{\sin \frac{a}{4}} = R \operatorname{ctg} \frac{a}{4},$$

$$S_1 + S_2 = 2R \operatorname{ctg} \frac{a}{4}.$$

Итак, сумма расстояний от одной вершины многоугольника до всех остальных его вершин равна диаметру круга, умноженному на котангенс четверти центрального угла, опирающегося на сторону правильного многоугольника. Эта теорема нами доказана для многоугольника с нечетным числом сторон. Покажем ее справедливость и для многоугольника с четным числом сторон:

$$S_1 = 2R \frac{\sin \frac{(n-1)a}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = 2R \frac{\sin \left(\frac{\pi}{2} - \frac{a}{2} \right)}{\sin \frac{a}{2}} = 2R \operatorname{ctg} \frac{a}{2},$$

$$S_2 = 2R \frac{\sin \frac{na}{2}}{\sin \frac{a}{2}} = \frac{2R}{\sin \frac{a}{2}},$$

$$S_1 + S_2 = \frac{2R}{\sin \frac{a}{2}} \left(1 + \cos \frac{a}{2} \right) = \frac{4R \cos^2 \frac{a}{4}}{2 \sin \frac{a}{4} \cos \frac{a}{4}} = 2R \operatorname{ctg} \frac{a}{4}.$$

Итак, формула справедлива и для многоугольника с четным числом сторон.

Доказанная нами теорема может быть сформулирована следующим образом:

Сумма длин диагоналей, выходящих из одной вершины правильного многоугольника, вместе с двумя сторонами равна $2R \operatorname{ctg} \frac{a}{4}$, где a — центральный угол, опирающийся на сторону правильного многоугольника.

Обозначая сумму диагоналей, выходящих из одной вершины (не считая сторон), через d_m а сторону многоугольника через a_m , мы можем предыдущую сумму записать так:

$$s_m = d_m + 2a_m = 2R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m},$$

где m — число сторон правильного многоугольника.

Умножим обе части полученного равенства на $\frac{m}{2}$:

$$S_m = \frac{ms_m}{2} = \frac{md_m}{2} + ma_m = mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}.$$

Здесь S_m — сумма всех сторон и диагоналей многоугольника; $\frac{md_m}{2} = D_m$ — сумма длин всех диагоналей; $ma_m = P_m$ — периметр многоугольника:

$$S_m = D_m + P_m = m R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}.$$

7. Найдем сумму D_m всех диагоналей правильного многоугольника:

$$\begin{aligned} D_m &= mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} - 2mR \sin \frac{180^\circ}{m} = mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} - 4mR \sin \frac{90^\circ}{m} \cos \frac{90^\circ}{m} = \\ &= mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \left(1 - 4 \sin^2 \frac{90^\circ}{m}\right) = 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \left(\frac{1}{2} + \sin \frac{90^\circ}{m}\right) \left(\frac{1}{2} - \sin \frac{90^\circ}{m}\right) = \\ &= 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \left(\sin 30^\circ + \sin \frac{90^\circ}{m}\right) \left(\sin 30^\circ - \sin \frac{90^\circ}{m}\right) = \\ &= 4mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \cdot 2 \sin \left(15^\circ + \frac{45^\circ}{m}\right) \cos \left(15^\circ - \frac{45^\circ}{m}\right) \times \\ &\quad \times 2 \sin \left(15^\circ - \frac{45^\circ}{m}\right) \cos \left(15^\circ + \frac{45^\circ}{m}\right) = \\ &= 4m R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \sin \left(30^\circ + \frac{90^\circ}{m}\right) \sin \left(30^\circ - \frac{90^\circ}{m}\right). \end{aligned}$$

Формула для вычисления длин диагоналей, полученная нами, преобразуется еще следующим образом:

$$D_m = 2mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \left(\cos \frac{180^\circ}{m} - \cos 60^\circ\right) = 2mR \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m} \left(\cos \frac{180^\circ}{m} - \frac{1}{2}\right).$$

Интересны частные случаи:

$$1) \ m = 3; \quad D_3 = 0;$$

$$\begin{aligned} 2) \ m = 4; \quad D_4 &= 8R \operatorname{ctg} 22^\circ 30' \left(\cos 45^\circ - \frac{1}{2}\right) = \\ &= 8R (\sqrt{2} + 1) \frac{\sqrt{2} - 1}{2} = 8R \cdot \frac{1}{2} = 4R; \end{aligned}$$

$$3) \ m = 5; \quad D_5 = 10R \operatorname{ctg} 18^\circ \left(\cos 36^\circ - \frac{1}{2}\right);$$

$$\begin{aligned} 4) \ m = 6; \quad D_6 &= 12R \operatorname{ctg} 15^\circ \left(\cos 30^\circ - \frac{1}{2}\right) = \\ &= 12R \frac{1 + \cos 30^\circ}{\sin 30^\circ} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \\ &= 12R \frac{1 + \frac{\sqrt{3}}{2}}{\frac{1}{2}} \cdot \frac{\sqrt{3} - 1}{2} = \\ &= 6R (2 + \sqrt{3}) (\sqrt{3} - 1) = 6R (1 + \sqrt{3}). \end{aligned}$$

Формула

$$s_m = d_m + 2a_m = 2R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}$$

может быть преобразована путем исключения $\operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}$ при помощи равенства $b_m = 2R \operatorname{tg} \frac{180^\circ}{m}$, где b_m — сторона одноименного описанного многоугольника:

$$\begin{aligned}\operatorname{tg} \frac{180^\circ}{m} &= \frac{2 \operatorname{tg} \frac{90^\circ}{m}}{1 - \operatorname{tg}^2 \frac{90^\circ}{m}}, \\ \frac{b_m}{2R} &= \frac{2 \frac{2R}{s_m}}{1 - \frac{4R^2}{s_m^2}} = \frac{4Rs_m}{s_m^2 - 4R^2}, \\ b_ms_m^2 - 8R^2s_m - 4R^2b_m &= 0, \\ s_m &= \frac{4R^2 + \sqrt{16R^4 + 4R^2b_m^2}}{b_m} = \frac{2R}{b_m} [2R + \sqrt{4R^2 + b_m^2}].\end{aligned}$$

В последнем выражении можно исключить b_m , пользуясь равенством:

$$\begin{aligned}\frac{b_m}{a_m} &= \frac{R}{\sqrt{R^2 - \frac{a_m^2}{4}}}; \quad b_m = \frac{Ra_m}{\sqrt{R^2 - \frac{a_m^2}{4}}}; \\ s_m &= \frac{2 \sqrt{R^2 - \frac{a_m^2}{4}}}{a_m} \left(2R + \sqrt{4R^2 + \frac{R^2a_m^2}{R^2 - \frac{a_m^2}{4}}} \right) = \\ &= \frac{4R}{a_m} \sqrt{R^2 - \frac{a_m^2}{4}} + \frac{4R^2}{a_m} = \frac{4R}{a_m} (k_m + R),\end{aligned}$$

где k_m — апофема правильного многоугольника:

$$S_m = \frac{2Rm}{a_m} (k_m + R).$$

Заменяя в последних двух равенствах k_m через R , получим два интересных неравенства:

$$\begin{aligned}s_m &< \frac{4R}{a_m} (R + R); \quad s_m < \frac{8R^2}{a_m}; \\ S_m &< \frac{4mR^2}{a^2}.\end{aligned}$$

Рассмотрим частные случаи:

$$\begin{aligned}S_3 &= \frac{6R \sqrt{3}}{3R} \left(\frac{R}{2} + R \right) = 2 \sqrt{3} \cdot \frac{3R}{2} = 3R \sqrt{3}; \\ S_4 &= \frac{8R \sqrt{2}}{2R} \left(\frac{R \sqrt{2}}{2} + R \right) = 4 \sqrt{2} \left(\frac{R \sqrt{2}}{2} + R \right) = 4R + 4R \sqrt{2}; \\ S_6 &= \frac{12R}{R} \left(\frac{R \sqrt{3}}{2} + R \right) = 12R \left(\frac{\sqrt{3}}{2} + 1 \right) = 6R (\sqrt{3} + 2).\end{aligned}$$

В заключение решим следующую задачу. По данной стороне правильного многоугольника построить сумму длин диагоналей многоугольника, выходящих из одной его вершины.

При построении исходим из формулы:

$$s_m = d_m + 2a_m = 2R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m}.$$

Пусть $AC = a_m$. Проведем радиус OA и перпендикулярный ему радиус OF :

$$\angle AOC = \frac{360^\circ}{m}.$$

Разделим угол AOC на четыре равные части; соединим A с D до пересечения в точке M с продолжением радиуса OF :

$$OM = R \operatorname{ctg} \angle AMO = R \operatorname{ctg} \frac{90^\circ}{m},$$

следовательно,

$$OM = \frac{d_m}{2} + a_m.$$

Отложив от точки M отрезок MK , равный a_m , получим:

$$d_m = 2OK.$$

ОБ ОДНОМ СВОЙСТВЕ ЧИСЛА $\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2}$.

И. В. Арнольд (Москва)

1. В настоящей заметке излагается решение одной задачи ¹⁾, относящейся по существу к области целых чисел, методом, в котором довольно своеобразно проявляется известная связь между иррациональным числом

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2},$$

лежащим в основе так называемого „золотого сечения“, и целочисленным рядом Фибоначчи

$$1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, \dots \quad (u_n = u_{n-1} + u_{n-2})$$

числителей и знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}.$$

¹⁾ Условие ее я узнал в 1930 г. и тогда же ее решил. Задача была решена и решена различными способами и до и после указанной даты; однако, насколько мне известно, решение не было нигде опубликовано, а в найденной мною форме оно представляет интерес и для решавших и для решивших эту задачу.

2. Задача. Рассматривается игра, заключающаяся в том, что двое игроков, чередуясь, берут спички из двух кучек, причем при каждом ходе игрок может взять либо произвольное количество спичек из одной кучки, либо поровну из каждой. Выигрывает сделавший последний возможный ход.

Требуется определить, при каких начальных положениях начинающий выигрывает, при каких нет, и найти метод правильной игры в первом случае ¹⁾.

3 Вопрос сводится, очевидно, к нахождению всех положений, в которых начинающий проигрывает; правильная игра и будет заключаться в переходе к таким положениям после каждого хода противника.

Пусть положение определяется числами α и β спичек в каждой кучке. Первое проигрышное положение определяется первой проигрышной парой 1,2: при всяком ходе противника игра следующим ходом заканчивается с выигрышем. Для построения второй проигрышной пары надо избегать включения использованных чисел 1 и 2 и использованной разности $\beta - \alpha = 2 - 1 = 1$, так как в этих случаях противник может одной из допустимых операций добиться положения 1,2. Мы получаем, стало быть, вторую проигрышную пару 3,5 с разностью 2, переход от которой к положению 1,2 в один ход невозможен, а в два хода возможен при любом первом ходе, не ведущем непосредственно к проигрышу. Продолжая так далее, мы можем последовательно строить таблицу проигрышных или, как мы будем говорить, основных пар.

1) 1,2;	2) 3,5;	3) 4,7;	4) 6,10;	5) 8,13;
6) 9,15;	7) 11,18;	8) 12,20;	9) 14,23;	10) 16,26;
11) 17,28;	12) 19,31;	13) 21,34;	14) 22,36;	15) 24,39;
...

вполне характеризуемую следующими тремя свойствами:

1) каждому номеру n соответствует однозначно пара a, b с разностью $b - a = n$;

2) первый член пары должен возрастать с возрастанием n , начиная с $a = 1$;

3) совокупность взятых вместе значений a и b должна исчерпывать без повторений натуральный ряд.

4. Наша задача заключается как раз в том, чтобы дать непосредственную арифметическую характеристику связи трех чисел n, a, b между собой и соответствующий метод „правильной игры“, не требующий предварительного составления указанной выше таблицы.

Теперь, когда читателю достаточно ясен характер задачи, я позволяю себе привести окончательную формулировку решения, неожиданность которой и составляет одну из интересных сторон вопроса.

¹⁾ Нетрудно доказать, что во всякой игре с определенными, исключающими роль случая правилами, исход игры предопределяется начальным положением в том смысле, что для одного из игроков должна существовать возможность вынудить выигрыш (или ничью, если она допускается правилами игры).

5. Пусть положение перед ходом играющего определяется числами α и $\beta > \alpha$. Полагаем

$$\tau = \frac{\sqrt{5}+1}{2} \quad \text{и} \quad \sigma^2 = 2 - \tau.$$

В том случае, когда α и β не более, чем трехзначные числа, встречающиеся ниже τ и σ^2 означают соответственно:

$$\tau = 1,618 \quad \text{и} \quad \sigma^2 = 0,382.$$

Введем еще обозначения: $[x]$ для целой и $\{x\}$ для дробной части числа x , так что

$$x = [x] + \{x\}, \quad \text{где} \quad 0 \leq \{x\} < 1.$$

Для нахождения выигрывающего хода умножаем α на τ и в том случае, когда

$$\{\alpha\tau\} < \sigma^2,$$

переходим к положению

$$[\alpha\tau] - \alpha, \alpha.$$

Если же

$$\{\alpha\tau\} > \sigma^2,$$

то в случае, когда

$$[\alpha\tau] + 1 < \beta,$$

переходим к положению

$$\alpha, [\alpha\tau] + 1,$$

в случае же, когда

$$[\alpha\tau] + 1 > \beta,$$

составляем разность

$$\beta - \alpha = n$$

и, отнимая поровну от α и β , переходим к положению

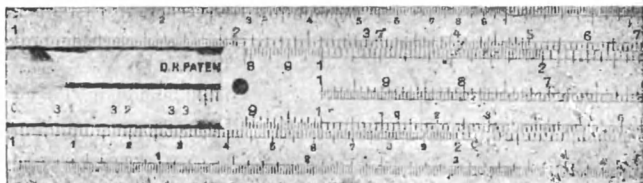
$$[n\tau], [n\tau] + n.$$

Начальное положение, при котором одновременно

$$\{\alpha\tau\} > \sigma^2 \quad \text{и} \quad [\alpha\tau] + 1 = \beta$$

— проигрышное.

6. При α и β , не превышающих 400, процесс нахождения правильного хода может быть значительно ускорен, если под рукой есть логарифмическая линейка (25 см).



Выдвигаем движок вправо так, чтобы единица его приходилась против 1,618 неподвижной шкалы. В этом положении, сохраняющемся во все время игры, на целочисленных делениях верхней и нижней шкал линейки отображается таблица основных пар § 3 таким образом, что номеру n основной пары, прочитанному на нижней шкале движка, соответствует в качестве ближайшего слева целочисленного деления нижней неподвижной шкалы первое число пары, а номеру основной пары, прочитанному на верхней шкале движка, соответствует в качестве ближайшего слева целочисленного деления верхней неподвижной шкалы второе число пары.

Поэтому, установив линейку, как сказано, находим выигрывающий ход при положении α, β так. Рассматриваем число α или число β , предполагая изменять соответственно β и α . На одной (и только на одной) из двух неподвижных шкал это число будет ближайшим целочисленным делением слева от какого-то целочисленного деления n движка.

По этому номеру n находим второй член искомого нового положения, как ближайшее целочисленное слева деление на другой (оставшейся) шкале линейки. Если это число оказывается больше β или соответственно α , так что соответствующие ходы невозможны, то оба составляющих числа нового положения, к которому придется перейти одновременным изменением α и β , разыскиваются по номеру $n = \beta - \alpha$, как ближайшие к нему целочисленные деления неподвижной шкалы (меньшее на нижней, большее на верхней линии линейки). Соответственно перечисленным случаям для каждого не проигрышного положения (при проигрышном каждая из операций возвращает нас к исходному положению) может быть один, два или три (но не больше) выигрывающих хода.

7. Можно, при том же положении движка, в точности следовать схеме § 5, руководствуясь следующими правилами:

1) Если между делениями $\alpha, \alpha + 1$ нижней шкалы движка находится только одно целочисленное деление неподвижной шкалы, то переходим к положению

$$[\alpha\tau] - \alpha, \alpha,$$

причем для нахождения $[\alpha\tau] - \alpha$ можно отыскать α на нижней неподвижной шкале, и тогда ближайшее левое целочисленное деление движка и будет как раз $[\alpha\tau] - \alpha$.

2) Если между делениями α и $\alpha + 1$ нижней шкалы движка находятся два целочисленных деления неподвижной шкалы, то замечаем левое из них $[\alpha\tau] + 1$ и переходим к положению $\alpha, [\alpha\tau] + 1$, если это возможно в силу неравенства $[\alpha\tau] + 1 < \beta$. Если нет, то составляем $n = \beta - \alpha$ и поступаем так, как описано в конце § 6.

8. Для обоснования приведенных в §§ 5—7 утверждений докажем прежде всего, что система пар

$$n) [n\tau], [n\tau^2],$$

где

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2} = 1,618034 \dots,$$

а

$$n = 1, 2, 3, 4, \dots,$$

удовлетворяет выведенным выше в § 3 трем требованиям, определяющим систему основных пар.

Заметим предварительно, что τ есть корень уравнения

$$\tau^2 - \tau - 1 = 0,$$

а потому, полагая еще $\sigma = \frac{1}{\tau}$, имеем:

$$\tau^2 = \tau + 1; \quad \sigma = \frac{1}{\tau} = \tau - 1; \quad \sigma^2 = 1 - \sigma = 2 - \tau.$$

Отсюда следует:

$$[n\tau^2] = [n(\tau + 1)] = [n\tau] + n,$$

и, следовательно, требование 1) § 3 выполнено. Так как $1 < \tau < 2$, то выполнено и требование 2), причем первая пара есть 1) 1, 2.

Для того чтобы убедиться в том, что и требование 3) § 3 выполнено, достаточно будет убедиться в том, что всякое натуральное число может быть представлено либо в виде $[n\tau]$, либо в виде $[n\tau^2] = [n(\tau + 1)]$, причем оба случая друга друга исключают. Это доказывается так.

Если a есть заданное наперед натуральное число, то найдется такое натуральное число n , что

$$(n - 1)\tau < a < n\tau.$$

Тогда

$$n\tau = a + \theta, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < \tau.$$

Умножая на σ , получим:

$$n = a\sigma + \theta\sigma = a\tau - a + \theta\sigma.$$

Так как

$$0 < \theta\sigma < \tau\sigma = 1,$$

то

$$\{a\tau\} = 1 - \theta\sigma.$$

Условие того, что a можно представить в виде $[m\tau]$, требует, чтобы $m = n$ и $0 < \theta < 1$, что равносильно неравенству

$$\{a\tau\} > 1 - \sigma = \sigma^2.$$

Аналогично, полагая

$$(n - 1)\tau^2 < b < n\tau^2,$$

и умножая равенство

$$n\tau^2 = b + \theta, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < \tau^2$$

на σ^2 , получим:

$$n = b\sigma^2 + \theta\sigma^2 = 2b - b\tau + \theta\sigma^2.$$

Так как

$$0 < \theta\sigma < \tau^2\sigma^2 = 1,$$

то

$$\{b\tau\} = \theta\sigma^2$$

и условие того, чтобы b можно было представить в виде $[m\tau^2]$, требует, чтобы $m = n$ и $0 < \theta < 1$, что равносильно неравенству

$$\{b\tau\} < \sigma^2.$$

Так как неравенства

$$\{b\tau\} > \sigma^2 \quad \text{и} \quad \{b\tau\} < \sigma^2$$

исключают друг друга, то высказанное выше положение доказано и система основных пар совпадает, таким образом, с системой чисел

$$n) [n\tau], [n\tau^2] \quad (n = 1, 2, 3, \dots).$$

9. Только что доказанное арифметическое свойство числа τ , которое можно формулировать так: во всяком целочисленном интервале заключается либо кратное числа τ , либо кратное числа $\tau + 1$, причем оба случая исключают друг друга, является характеристическим для числа

$$\tau = \frac{\sqrt{5} + 1}{2}.$$

В этом легче всего убедиться здесь, замечая, что на основе этих свойств может быть построена таблица основных пар, которая, с другой стороны, однозначно получается последовательным построением, указанным в § 3.

10. Сопоставляя полученные в § 8 формулы, мы найдем для основной пары $n) a, b$ следующие соотношения:

$$\begin{aligned} n\tau &= a + \theta; \quad n\tau^2 = b + \theta, \quad \text{где} \quad 0 < \theta < 1, \\ a\tau &= b - 1 + 1 - \theta\sigma, \quad \text{где} \quad 0 < \sigma^2 < 1 - \theta\sigma < 1, \\ b\tau &= a + b + \theta\sigma^2, \quad \text{где} \quad 0 < \theta\sigma^2 < \sigma^2 < 1, \end{aligned}$$

откуда, в частности, следует:

$$\begin{aligned} b &= [a\tau] + 1 = [n\tau^2], \\ a &= [b\tau] - b = [n\tau], \\ n &= [a\tau] - a + 1 = 2b - [b\tau] \end{aligned}$$

(формула $b = [a\tau] + 1$ заключает в себе тождество $[n\tau^2] = [[n\tau]\tau] + 1$).

Отсюда непосредственно вытекают следующие предложения, лежащие в основе правил § 5 и § 7.

1) Число x является первым членом основной пары или вторым в зависимости от того, будет ли $\{x\tau\}$ больше или меньше $\sigma^2 = 0,382\dots$, причем в первом случае соответствующая пара есть

$$x, [x\tau] + 1,$$

а во втором

$$[x\tau] - x, x.$$

2) Если в интервале $k\tau, (k+1)\tau$ число x является единственным или правым (из двух, ибо $\tau < 2$) целым числом, то оно есть ($x = [(k+1)\tau]$) первый член пары с номером, равным правому концу интервала; в противном случае x есть ($x \neq [n\tau]$, но $x = [k\tau] + 1$) второй член пары с первым членом, равным левому концу интервала.

3) Если в интервале $[x\tau], [(x+1)\tau]$ заключается одно целое число, то x — второй член пары, если два, то — первый (со вторым, равным меньшему из этих двух чисел).

Отметим еще некоторые следствия приведенных выше формул.

I. Если $n)a, b$ — основная пара, то $n_1)b - 1, a + b - 1$ и $n_2)a + b, a + 2b$ — также основные пары.

II. Если пара $a, a + x$ основная и известно, что x есть второй элемент основной пары, то эта последняя есть пара $a - x, x$.

11. При построении таблицы основных пар можно также исходить из закона следования разностей первых членов a при $n = 1, 2, 3$, который выражается схемой:

$$\begin{array}{ccccccccc} & & & & 2 & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & \\ & & & & 2 & & 1 & & 2 \\ & & & & & & & & \\ & & & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 2 \\ & & & & & & & & & & & & \\ & & & & 2 & & 1 & & 2 & & 1 & & 2 & & 2 & & 1 & & 2 \end{array} \quad (F)$$

Здесь под каждой двойкой ставим 12, под каждой единицей 2 и читаем однозначные числа по строчкам в порядке написания. Легко доказать, что каждая следующая строчка при этом является повторением двух предыдущих.

Можно вывести такой закон образования разностей и не пользуясь доказанными в § 8 свойствами основных пар, на основании лишь свойств 1), 2), 3) § 3.

Действительно, строя пары последовательно и располагая их в таблицу согласно схеме (F), легко показать индуктивно, что первый член нижней пары на единицу больше второго стоящей над ним верхней пары, если не считать нижних пар, следующих за разностью 1 в схеме (F). В самом деле, допуская вертикальное соответствие схеме (F) соответствие пар

$$\begin{array}{cc} x, & b \\ b+1, & y, \end{array}$$

найдем либо

$$\begin{array}{cc} x, & b \\ b+1, & y \end{array} \quad \begin{array}{cc} x+1, & b+2 \\ b+3, & y', \end{array}$$

либо

$$\begin{array}{cc} x, & b \\ b+1, & y \end{array} \quad \begin{array}{cc} x+2, & b+3 \\ (b+2, y_1), & b+4; y_2, \end{array}$$

и указанный закон вновь имеет место, если согласно условию не считать пары, заключенной в скобки.

12. Таблица (F) дает, очевидно, число целочисленных точек в последовательных интервалах $k\tau$, $(k+1)\tau$ (это хорошо видно на логарифмической линейке, если поставить единицу движка на $\tau = 1,618$). Из неравенства $2\tau > 3$ следует поэтому, что в таблице (F) не может быть двух единиц подряд, причем легко видеть, что при переходе от n к $n+1$ получается разность 1, если $\theta = n\tau - a < \sigma^2 = 2 - \tau = 0,382\dots$, и разность 2 в противном случае. Из неравенства $3\tau < 5$ следует далее, что в таблице (F) не может встретиться более двух двоек подряд.

Из структуры схемы (F) (каждая строчка есть, повторение двух предыдущих) в частности следует, что номерам, занимающим четные места в ряду Фибоначчи 1, 1, 2, 3, 5, 8, 13, 21, \dots $u_n = u_{n-1} + u_{n-2}$ числителей и знаменателей подходящих дробей непрерывной дроби

$$\tau = 1 + \frac{1}{1 + \frac{1}{1 + \dots}}$$

соответствуют пары, выражаемые двумя следующими за номером членами ряда Фибоначчи. Можно показать, что для дроби τ все наилучшие при ограниченной величине знаменателя рациональные приближения (фареевские приближения) совпадают с подходящими дробями. В силу этого погрешность, с которой отношения $\frac{a}{n}$ и $\frac{b}{a}$ дают τ для пар с номерами, встречающимися в ряду Фибоначчи (в отношении критерия $\{x\sigma\} \geq \sigma^2$ и равносильных ему) достигает экстремального по сравнению с соседними парами значения, а потому эти пары сравнительно трудно определяются, что в особенности заметно при пользовании логарифмической линейкой.

13. Мой товарищ И. М. Абрамов, независимо от меня решивший ту же задачу иным методом, пришел к следующему, включающему лишь операции с целыми числами изящному правилу построения системы основных пар n) a , b , вывести которое на основе детального рассмотрения схемы (F) и дополнить правилами „правильной“ игры я предоставляю читателю:

Если

$$n = \sum_i u_{k_i} + u_0,$$

то

$$a = \sum_i u_{k_i+1} + u_1,$$

$$b = \sum_i u_{k_i+2} + u_2,$$

где

$$u_0 = u_1 = 1; \quad u_2 = 2; \quad u_n = u_{n-1} + u_{n-2}.$$

Здесь связь задачи с рядом Фибоначчи, положенным в основу своеобразной системы счисления, раскрыта до конца. Сопоставление этого, чисто целочисленного метода решения целочисленной задачи с изложенным выше методом, основанным на рассмотрении иррационального числа τ , не лишено методологической остроты.

РЕШЕНИЕ ОДНОЙ КОМБИНАТОРНОЙ ЗАДАЧИ

С. Е. Арш он (Москва)

Исследуемая задача формулируется следующим образом: сколькими способами на шахматной доске из n^2 клеток можно расставить n слонов так, чтобы никакие два из них не угрожали друг другу?

Задача эта имеет любопытную историю, однако до сих пор общего решения для нее опубликовано не было¹⁾. Метод, при помощи которого мне удалось найти общее решение этой задачи, является частным случаем более общих методов, подробное изложение которых будет дано мною в подготавливаемой к печати монографии „Новая комбинаторная алгебра“. Тем не менее мне придется здесь остановиться предварительно на некоторых вопросах, без чего понимание и оценка примененного мною метода были бы затруднительны.

Будем называть двумерной комбинаторной матрицей конечное множество узлов прямоугольной решетки. Заданные узлы решетки будем называть элементами данной матрицы.

Будем, далее, называть i -й характеристикой данной матрицы число всех возможных сочетаний из ее элементов, по i , при условии, что никакая пара элементов, принадлежащих одной строке или одному столбцу, не входит в одно и то же сочетание. Очевидно, что значения характеристик матрицы не меняется от перестановки строк, столбцов и поворота матрицы на 90° . Применение этих операций будем называть поэтому тождественным преобразованием матрицы.

Будем говорить, что матрица имеет правильную форму, если путем тождественных преобразований она может быть приведена к такому виду, что каждому элементу $(k+1)$ -й строки (счет строк сверху вниз) будет соседствовать по вертикали элемент в k -й строке.

Называя длиной строки число содержащихся в ней элементов и обозначая символом m_k длину k -й строки, заметим, что для матриц, имеющих правильную форму, при любом значении k будет иметь место соотношение

$$m_k \leq m_{k-1}.$$

Так, например, на фиг. 1 изображена матрица, которой затем, путем перестановки строк и столбцов, придана правильная форма (фиг. 2).

¹⁾ Для читателей, желающих подробнее познакомиться с этой задачей, рекомендуем книжку: Окунев, Комбинаторные задачи на шахматной доске, ОНТИ, Москва 1936. (Ред.).

Относительно матрицы правильной формы с числом строк (высота матрицы), равным n , можно доказать ¹⁾, что ее n -я характеристика $-P_n$ может быть выражена следующим символическим равенством:

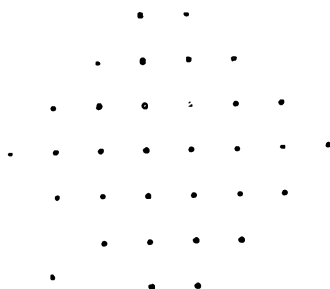
$$P_n = |m_1 m_2 m_3 \dots m_n|, \quad (1)$$

где правая часть есть комбинаторное произведение из длин строк (или просто строк) данной матрицы, раскрываемое по следующему правилу:

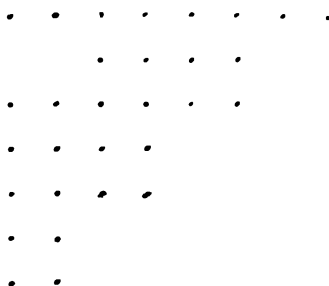
$$m_1 m_2 m_3 \dots m_n = [m_1 - (n-1)] [m_2 - (n-2)] \dots [m_{n-1} - 1] m_n. \quad (2)$$

Так, например, для матрицы фиг. 2 будем иметь:

$$P_7 = |8 \cdot 6 \cdot 6 \cdot 4 \cdot 4 \cdot 2 \cdot 2| = 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 \cdot 1 \cdot 2 = 2^4 \cdot 1^3 = 16.$$



Фиг. 1.



Фиг. 2.

Следует заметить, что если в левой части (2) $m_1 = m_2 = m_3 = \dots = m_n$, то будет иметь место комбинаторная степень, которая, как это показывает правая часть равенства (2), будет представлять собой факториал. Пользуясь поэтому принятым для факториалов обозначением, мы для этого случая нормальных матриц будем иметь:

$$P_n = |\underbrace{m m m \dots m}_{n \text{ раз}}| = |m^n| = m(m-1)(m-2) \dots (m-n+1).$$

¹⁾ P_n есть число всех возможных сочетаний по n элементов из элементов матрицы в n строк правильной формы, при условии, что никакая пара элементов, принадлежащих одной строке или одному столбцу, не входит в одно и то же сочетание. Очевидно, в каждое сочетание при этих условиях входит один и только один элемент каждой строки. Из n -й (т. е. самой нижней) строки можно взять любой из m_n элементов; с ним может войти в одно и то же сочетание любой из m_{n-1} элементов, не соседствующих с ним по вертикали; это дает $(m_{n-1}-1)m_n$ возможных сочетаний из двух элементов двух последних строк. С каждой из этих пар может войти в одно сочетание любой из $m_{n-2}-2$ элементов $(n-2)$ -й строки, не стоящих в одной колонке ни с одним из элементов этой пары; это дает $(m_{n-2}-2)(m_{n-1}-1)m_n$ сочетаний из элементов последних трех строк. Рассуждая так далее, приходим к формуле:

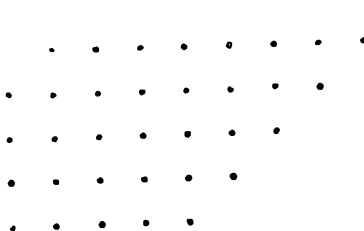
$$P_n = |m_1 m_2 m_3 \dots m_n| = [m_1 - (n-1)] [m_2 - (n-2)] \dots [m_{n-1} - 1] m_n. \quad (1)$$

(Ред.)

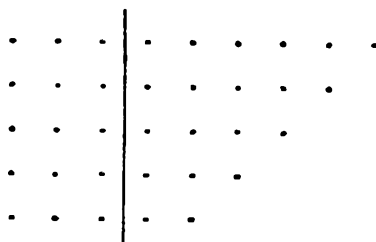
Комбинаторное умножение, вообще говоря, дистрибутивно относительно сложения, но в более общем смысле, чем это имеет место в арифметике. Здесь мы рассмотрим один частный случай дистрибутивности комбинаторного произведения. Пусть нам задана нормальная матрица правильной формы (фиг. 3). Разобьем вертикалью (фиг. 4) данную матрицу на две части. Пусть при этом длина каждой строки левой части равна x , а длины строк правой части соответственно m_1, m_2, \dots, m_n . Тогда P_n для этой матрицы будет иметь вид:

$$P_n = [(x + m_1)(x + m_2)(x + m_3) \dots (x + m_n)]. \quad (3)$$

Значение P_n мы можем получить здесь, пользуясь формулой (2).



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Однако нетрудно убедиться, что мы можем получить значение P_n , раскрыв скобки в правой части (3) по правилу умножения многочленов, с той лишь поправкой, что степени x , а также произведения из m_i ($i = 1, 2, \dots, n$) нужно рассматривать как произведения комбинаторные и вычислять по формуле (2). Таким образом мы можем написать ¹⁾:

$$P_n = x^{(n)} + q_1 x^{(n-1)} + q_2 x^{(n-2)} + \dots + q_i x^{(n-i)} + \dots + q_n, \quad (4)$$

где q_i будет, очевидно, i -й характеристикой правой части матрицы, изображенной на схеме 4.

Теперь мы можем перейти к решению поставленной задачи. Обозначим искомое число расстановок слонов через P_n . Вместе с тем пусть p_i означает число всех возможных расстановок на заданной доске i слонов одного цвета (черных или белых), среди которых никакие два не угрожают друг другу. Тогда, как это легко видеть,

$$P_n = p_n + p_{n-1}p'_1 + p_{n-2}p'_2 + \dots + p_{n-i}p'_i + \dots + p_1p'_{n-1} + p'_n, \quad (5)$$

¹⁾ В самом деле, $x^{(n)}$ есть число сочетаний из n элементов, когда все n элементов взяты из левой части матрицы. q_1 есть число сочетаний из элементов правой части по одному; каждое из этих сочетаний можно соединить с любым из $x^{(n-1)}$ сочетаний из $(n-1)$ элементов, взятых в оставшихся $(n-1)$ строках матрицы в ее левой части; таких составных сочетаний будет поэтому $q_1 x^{(n-1)}$. q_2 есть число сочетаний из элементов правой части по два; каждое из этих сочетаний можно соединить с любым из $x^{(n-2)}$ сочетаний из $(n-2)$ элементов, взятых в оставшихся $(n-2)$ строках матрицы левой части; таких составных сочетаний будет $q_2 x^{(n-2)}$. Продолжая так, убеждаемся, что сумма, стоящая в правой части равенства (4), дает действительно P_n , т. е. число сочетаний из n элементов всей матрицы. (Ред.)

где p_i означает соответствующее число расстановок черных слонов, а p'_i — белых.

Для случая, когда $n = 2k$, т. е. когда n четно, очевидно, что $p_i = p'_i$, и формула (5) примет вид:

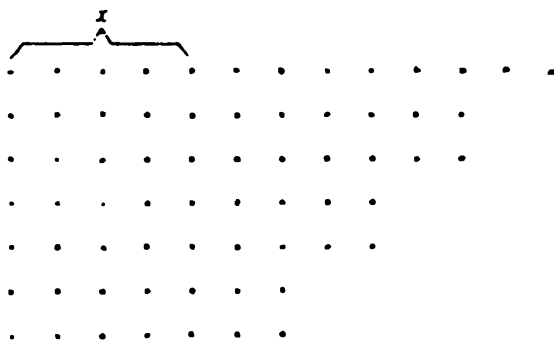
$$P_{2k} = p_{2k} + p_{2k-1}p_1 + p_{2k-2}p_2 + \dots + p_1p_{2k-1} + p_{2k}. \quad (5')$$

Рассмотрим сначала именно этот случай. Здесь, как видим, задача сводится к нахождению значения p_i .

Повернем шахматную доску на 45° . Тогда расположение одноцветных клеток будет аналогично (при $n = 8$) расположению элементов матрицы, изображенной на схеме (фиг. 1). Причем, так как при повороте доски диагонали заняли положение горизонталей и вертикалей, то очевидно, что искомое значение p_i есть не что иное, как i -я характеристика (для $n = 8$) матрицы (1) (фиг. 1) или, что то же, матрицы (2) (фиг. 2).

Мы произведем вычисление интересующих нас характеристик для случая $n = 8$, т. е., иначе говоря, характеристик матрицы (2).

Из последующего будет ясно, что метод этого вычисления пригоден для любого значения n . Дополним матрицу (2) x столбцами слева, как это показано на фиг. 5.



Фиг. 5.

Тогда согласно формуле (2) P_7 для этой матрицы выразится формулой:

$$\begin{aligned} P_7 &= |(x+8)(x+6)(x+6)(x+4)(x+4)(x+2)(x+2)| = \\ &= (x+2)^4(x+1)^3. \end{aligned} \quad (6)$$

С другой стороны, пользуясь формулой (4), имеем:

$$P_7 = x^{(7)} + p_1x^{(6)} + p_2x^{(5)} + p_3x^{(4)} + p_4x^{(3)} + p_5x^2 + p_6x + p_7. \quad (7)$$

Сравнивая (6) и (7), имеем:

$$\begin{aligned} (x+2)^4(x+1)^3 &= x^{(7)} + p_1x^{(6)} + p_2x^{(5)} + p_3x^{(4)} + p_4x^{(3)} + \\ &+ p_5x^{(2)} + p_6x + p_7, \end{aligned} \quad (8)$$

где p_1, p_2, \dots, p_7 — интересующие нас характеристики матрицы (2). Замечая, что $x^{(n)}$ при $x < n$ равно нулю, и вставляя последовательно

вместо x в уравнение (8) числа $0, 1, 2, \dots, 6$, мы получим значения искоемых характеристик:

$$x = 0 \text{ дает } p_7 = 2^4 \cdot 1^3,$$

$$x = 1 \text{ дает } p_7 + p_6 = 3^4 \cdot 2^3,$$

и, следовательно,

$$p_6 = 3^4 \cdot 2^3 - p_7 = 3^4 \cdot 2^3 - 2^4 \cdot 1^3,$$

$$x = 2 \text{ дает } 2p_5 + 2p_6 + p_7 = 4^4 \cdot 3^3,$$

$$p_5 = \frac{4^4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^4 \cdot 2^3 + 2^4 \cdot 1^3}{2!}.$$

• • • • •

• • • • •

• • • • •

• • • • •

• • • • •

• • • • •

• • • • •

Фиг. 6а.

Фиг. 6б.

И, вообще, как нетрудно заметить,

$$p_i = \frac{(9-i)^4(8-i)^3 - C_{7-i}^1(8-i)^4(7-i)^3 + C_{7-i}^2(7-i)^4(6-i)^3 - \dots}{(7-i)!}.$$

Обобщая эту формулу на случай доски из $(2k)^2$ клеток, получим:

$$p_i = \frac{(2k+1-i)^k(2k-i)^{k-1} - C_{2k-1-i}^1(2k-i)^k(2k-i-1)^{k-1} +}{(2k-i-1)!} + \frac{C_{2k-1-i}^2(2k-i-1)^k(2k-i-2)^{k-1}}{(2k-i-1)!}.$$

Подставляя найденное значение p_i в формулу (5'), получим искомое значение P_{2k} . Для случая $2k = 8$ будем иметь:

$$p_8 = 22\,522\,960.$$

Замечание. Следует заметить, что в формуле (5') $p_{2k} = 0$. Это следует не только из выражения для p_i , но и из того факта, что матрица (фиг. 2) всегда будет содержать $2k - 1$ строк.

Перейдем теперь к рассмотрению случая, когда $n = 2k + 1$, т. е. n нечетно. Как и в предыдущем случае, исследование проведем на частном примере. Пусть $k = 3$. Тогда расположение одноцветных клеток после поворота доски на 45° будет иметь такой вид, как показано на фиг. 6а и 6б.

Обозначая характеристики матрицы фиг. 6а через p' и матрицы фиг. 6б через p и применяя для их вычисления формулу (8), будем иметь:

$$\begin{aligned} p_7 &= 0, \\ p_6 &= 2^4 \cdot 1^3, \\ p_5 &= \frac{3^4 \cdot 2^3 - 2^4 \cdot 1^3}{2!}, \\ p_4 &= \frac{4^4 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^4 \cdot 2^3 + 2^4 \cdot 1}{3!}, \end{aligned}$$

и вообще

$$p_i = \frac{(2k+2-i)^{k+1} (2k+1-i)^k - C_{2k+1-i}^1 (2k+1-i)^{k+1} (2k-i)^k +}{(2k-i)!} + \frac{C_{2k+1-i}^2 (2k-i)^{k+1} (2k-i-1)^k - \dots}{(2k-i)!},$$

что после сокращения на $(2k+1-i)$ даст:

$$p_i = \frac{(2k+2-i)^{k+1} (2k+1-i)^{k-1} - C_{2k-i}^1 (2k+1-i)^{k+1} (2k-i)^{k-1} +}{(2k-i)!} + \frac{C_{2k-i}^2 (2k-i)^{k+1} (2k-i-1)^{k-1} - \dots}{(2k-i)!}$$

Тем же приемом получим значения p' :

$$\begin{aligned} p'_9 &= 2^3 \cdot 1^3, \\ p'_5 &= 3^3 \cdot 2^3 - 2^3 \cdot 1^3, \\ p'_4 &= 4^3 \cdot 3^3 - 2 \cdot 3^3 \cdot 2^3 + 2^3 \cdot 1^3, \end{aligned}$$

и вообще

$$p'_i = \frac{(2k+2-i)^k (2k+1-i)^k C_{2k-i}^1 (2k+1-i)^k (2k-i) +}{(2k-i)!} + \frac{C_{2k-i}^2 (2k-i)^k (2k-i-1)^k - \dots}{(2k-i)!}.$$

Подставляя найденные значения p_i и p'_i в формулу (5), получим искомое значение P_{2k+1} . Для случая $2k+1=5$ будем иметь:

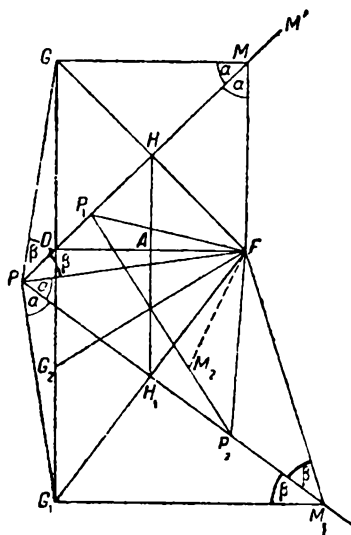
$$P_5 = 3368.$$

О ПАРАБОЛАХ, ВПИСАННЫХ В ТРЕУГОЛЬНИК

Н. А. Извольский (Москва—Ярославль)

Известно, что в треугольник можно вписать бесконечно много парабол, причем за фокус можно взять любую точку окружности, описанной около этого треугольника. Ввиду малого распространения у нас курса синтетической теории конических сечений даем здесь краткое выяснение этого положения.

Пусть F есть фокус параболы и GG_1 ее директриса — сама парабола рассматривается как геометрическое место точек, равноотстоящих от фокуса и директрисы (фиг. 1). Возьмем любые точки G и G_1 на директрисе и построим GF и G_1F , а затем прямые MH и M_1H_1 , перпендикулярные соответственно к GF и G_1F и проходящие через середины этих отрезков. Тогда MH и M_1H_1 суть касательные к параболе: если $FD \perp GG_1$ (FD — ось параболы) и $GM \parallel G_1M_1 \parallel DF$, то легко видеть, что точки M и M_1 принадлежат параболе, ибо $MG = MF$ и $M_1G_1 = M_1F$; всякая другая точка прямых MH и M_1H_1 , например точка M' на прямой MH , не может принадлежать параболе, так как $M'F = M'G$, следовательно, $M'F$ не равно расстоянию точки M' от директрисы GG_1 .



Фиг. 1.

Пусть точка P есть точка пересечения наших касательных MH и M_1H_1 ; построим PG , PF и PG_1 . Тогда $PG = PF = PG_1$, что очевидно; поэтому точки G , F и G_1 лежат на круге, центром которого служит точка P (круг на чертеже не дан).

Тогда легко видеть, что если $\angle HMF = \alpha$, то и $HMG = \alpha$ и $FPH_1 = \alpha$ (ибо $\angle HMF = \angle GMH = \angle DGF$ — последнее потому, что стороны этих углов перпендикулярны, а $\angle DGF$ — вписанный в круг, на котором расположены точки G , F и G_1 , и он опирается на дугу FG_1 , но $\angle FPH_1$

есть центральный для этого круга и он опирается на дугу, равную половине дуги FG_1), далее еще $\angle GPH_1 = \alpha$. Также: если $\angle G_1M_1H_1 = \beta$, то и $\angle H_1M_1F = \angle FPH = \angle HPG = \beta$. Отсюда следует:

$$\angle MFP = \pi - \alpha - \beta, \quad \angle M_1FP = \pi - \alpha - \beta$$

и

$$\angle MFM_1 = \angle MFP + \angle M_1FP = 2\pi - 2(\alpha + \beta),$$

причем прямая PF делит этот угол пополам.

Пусть теперь G_2 — любая точка директрисы и прямая P_1P_2 перпендикулярна к G_2F и проходит через середину отрезка G_2F ; тогда P_1P_2 есть третья касательная к параболе, причем пусть точки P_1 и P_2 суть точки пересечения с первыми двумя касательными. Тогда к этим точкам применимо все то же, что и к точке P . Следовательно, P_1F есть биссектор угла $MF M_2$, где точка M_2 есть точка касания прямой P_1P_2 , и P_2F есть биссектор угла M_2FM_1 . Следовательно, $\angle P_1FP_2$ есть половина угла $MF M_1$, а потому

$$\angle P_1FP_2 = \pi - (\alpha + \beta).$$

Так как $\angle P_1PP_2 = \alpha + \beta$, то четыре точки P , P_1 , P_2 и F лежат на одном круге, т. е. фокус параболы, касающейся сторон треугольника PP_1P_2 , лежит на круге, описанном около этого треугольника.

Заметим еще, что если соединить прямою точки H и H_1 (эти точки суть проекции фокуса F на касательные), то HH_1 есть средняя линия треугольника GFG_1 , и она должна проходить через середину отрезка DF , через точку A , которая есть, следовательно, вершина параболы, а прямая $HH_1 \perp DF$ есть вершинная касательная, и на ней должны лежать проекции фокуса F на все касательные к параболе.

Найдем теперь ряд подготовительных положений к главной цели настоящей работы, которую служит определение параметра вписанной параболы (под „параметром параболы“ будем понимать расстояние ее фокуса от директрисы — назовем его через $2p$), и к выводу ряда следствий отсюда.

1. Рассмотрим треугольники PMF и PM_1F (фиг. 1); очевидно, они подобны, и из них имеем:

$$\frac{FM}{FP} = \frac{FP}{FM_1}, \quad \text{или} \quad FP^2 = FM \cdot FM_1,$$

т. е. отрезок, соединяющий фокус параболы с точкою пересечения двух касательных к ней, служит средним пропорциональным между радиусами-векторами точек касания.

2. Пусть имеем треугольник ABC (фиг. 2) и пусть точка F есть любая точка круга, описанного около треугольника ABC ; тогда эта точка F есть фокус некоторой параболы, вписанной в треугольник ABC . Построим $FP_2 \perp AC$ и $FP_3 \perp AB$. Пусть $FP_2 = p_2$ и $FP_3 = p_3$; пусть еще $FB = d_2$ и $FC = d_3$. Тогда $\triangle FP_2C \sim \triangle FP_3B$, ибо $\angle FBP_3$ вписанный и опирается на дугу ACF , и та же дуга расположена между сторонами и их продолжениями угла P_2CF , т. е. $\angle P_3BF = \angle P_2CF$. Из подобия этих треугольников имеем:

$$\frac{FP_2}{FP_3} = \frac{FC}{FB},$$

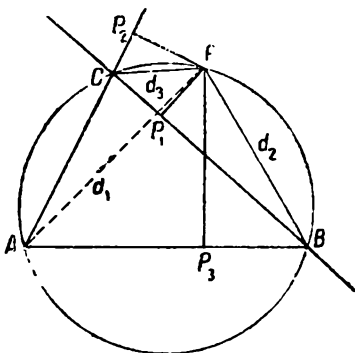
или коротко:

$$\frac{p_2}{p_3} = \frac{d_3}{d_2}, \quad \text{или} \quad p_2 d_2 = p_3 d_3.$$

Ясно, что если p_1 есть расстояние фокуса F от стороны BC треугольника ABC и d_1 — расстояние F от точки A , то ¹⁾

$$p_1 d_1 = p_2 d_2 = p_3 d_3,$$

¹⁾ Надо рассмотреть треугольнички AFP_2 и FBP_1 .



Фиг. 2.

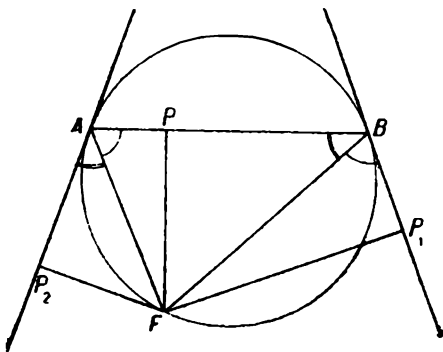
т. е. произведения расстояний любой точки круга, описанного около треугольника, от одной из его сторон и от противоположной вершины равны между собою.

3. Пусть имеем круг и какую-либо хорду AB (фиг. 3). Построим в концах ее касательные и построим из любой точки F круга перпендикуляры FP , FP_1 и FP_2 на хорду AB и на касательные. Тогда $\angle FBP_1 = \angle FAB$ и $\angle FAP_2 = \angle FBA$, откуда следует:

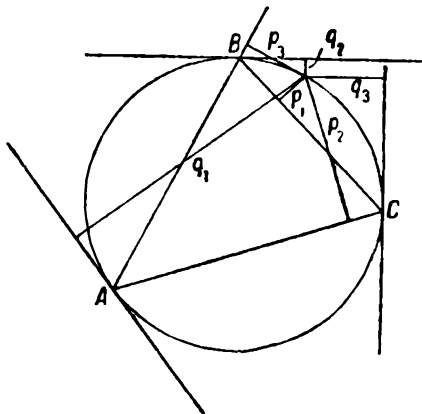
$$\triangle AFP_2 \sim \triangle FPB \quad \text{и} \quad \triangle AFP \sim \triangle FBP_1.$$

Следовательно:

$$\frac{FP_2}{FP} = \frac{AF}{FB} \quad \text{и} \quad \frac{FP_1}{FP} = \frac{FB}{FA}.$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Отсюда легко получаем:

$$\frac{FP_2}{FP} = \frac{FP}{FP_1},$$

т. е. расстояние любой точки круга от какой-либо его хорды есть средний пропорциональный отрезок между расстояниями этой точки от касательных к кругу в концах взятой хорды.

4. Пусть имеем треугольник ABC ; опишем около него круг и построим в вершинах A , B и C касательные к этому кругу (фиг. 4). Назовем расстояния какой-либо точки F круга от сторон BC , CA и AB треугольника ABC соответственно через p_1 , p_2 и p_3 , а расстояния F от касательных в точках A , B и C соответственно q_1 , q_2 и q_3 . Тогда в силу предыдущего имеем:

$$p_1^2 = q_3 q_2; \quad p_2^2 = q_3 q_1; \quad p_3^2 = q_1 q_2,$$

откуда

$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 = q_1^2 q_2^2 q_3^2 \quad \text{или} \quad p_1 p_2 p_3 = q_1 q_2 q_3.$$

Итак:

Произведение расстояний какой-либо точки круга, описанного около треугольника, от сторон этого треугольника равно произведению расстояний этой же точки от касательных в вершинах этого треугольника.

5. Перейдем теперь к выводу различных выражений для параметра вписанной в треугольник параболы.

Пусть имеем $\triangle ABC$ (фиг. 5) и точку F , расположенную на круге, описанном около этого треугольника. Эта точка служит фокусом параболы, касающейся сторон треугольника ABC .

Построим $FD \perp BC$, $FE \perp AC$ и $FI \perp AB$; тогда точки D , E и I служат проекциями фокуса F на касательные к параболе, а потому они должны лежать на одной прямой EDI , являющейся вершинной касательной к нашей параболе. Построим еще FP перпендикулярно к этой вершинной касательной; тогда $FP = p$ и есть половина параметра нашей параболы.

Пусть еще $FD = p_1$, $FE = p_2$, $FI = p_3$, $FA = d_1$, $FB = d_2$, $FC = d_3$.

Назовем еще радиусы-векторы точек касания прямых BC , CA и AB с нашей параболой (эти точки на чертеже не даны) соответственно через r_1 , r_2 и r_3 ; точкою касания вершинной касательной EI служит сама точка P , и ее радиус-вектор есть p .

Так как точка D есть точка пересечения двух касательных к параболе, а именно BC и EI , то на основании первого подготовительного положения имеем:

$$p_1^2 = pr_1.$$

Так же точно для точек E и I получим:

$$p_2^2 = pr_2 \quad \text{и} \quad p_3^2 = pr_3.$$

Отсюда найдем:

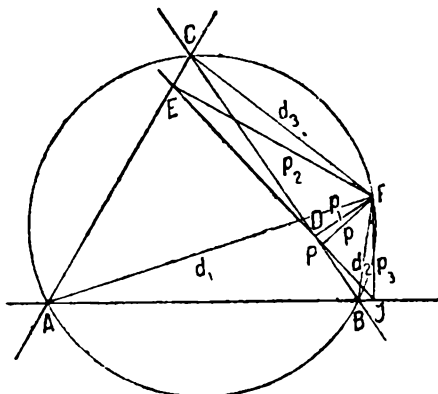
$$p_1^2 p_2^2 p_3^2 = p^3 r_1 r_2 r_3,$$

или

$$p = \sqrt[3]{\frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{r_1 r_2 r_3}}. \quad (1)$$

Это и есть первое выражение для полупараметра нашей параболы.

Так как $\angle AEF = \frac{\pi}{2}$ и $\angle AIF = \frac{\pi}{2}$, то четыре точки A , E , I , и F лежат на одном круге (на чертеже не дан) и треугольник AEI вписан в этот круг; в таком случае к нему применимо второе подготовительное положение. Расстояние точки F от стороны EI равно p , а от противоположной вершины A равно d_1 .



Фиг. 5.

Что касается расстояний точки F от других двух сторон этого треугольника и противоположных им вершин, то они суть или p_2 и p_3 , или p_3 и p_2 .

Поэтому имеем:

$$pd_1 = p_2 p_3.$$

Нетрудно также видеть, что круг, описанный около треугольника DEC , проходит через точку F (ибо углы FDC и FEC прямые), а также что круг, описанный около треугольника BDI , тоже проходит через F ; поэтому, как раньше, получим:

$$pd_3 = p_1 p_2 \quad \text{и} \quad pd_2 = p_3 p_1.$$

Перемножая эти три равенства, получим:

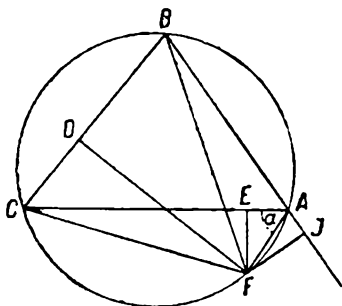
$$p^3 d_1 d_2 d_3 = p_1^2 p_2^2 p_3^2,$$

откуда

$$p = \sqrt[3]{\frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{d_1 d_2 d_3}}. \quad (2)$$

Сравнивая выражения (1) и (2), получим:

$$r_1 r_2 r_3 = d_1 d_2 d_3,$$



Фиг. 6.

т. е. произведение радиусов-векторов параболы, вписанной в треугольник, для точек касания сторон этого треугольника равно произведению расстояний вершин этого треугольника от фокуса параболы.

Воспользовавшись четвертым подготовительным положением, мы можем найденным выражениям (1) и (2) для полупараметра параболы придать иной вид, а именно:

$$p = \sqrt[3]{\frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{r_1 r_2 r_3}} \quad \text{и} \quad p = \sqrt[3]{\frac{q_1^2 q_2^2 q_3^2}{d_1 d_2 d_3}},$$

где q_1 , q_2 и q_3 суть расстояния фокуса F от касательных к кругу, описанному около треугольника ABC , построенных в его вершинах.

6. Найдем теперь выражение для p в зависимости от одного параметра.

Пусть опять треугольник ABC (фиг. 6) вписан в круг и точка F есть фокус вписанной параболы. Построим опять $FA = d_1$, $FB = d_2$, $FC = d_3$, и затем $FD \perp BC$, $FE \perp CA$ и $FI \perp AB$, причем пусть $FD = p_1$, $FE = p_2$ и $FI = p_3$. Чтобы определить как-либо положение точки F на круге, введем параметр α ; именно пусть

$$\angle CAF = \alpha.$$

Тогда

$$\angle FAI = \pi - (A + \alpha), \quad \angle ACF = B - \alpha,$$

где A и B обозначают углы треугольника ABC .

Тогда из треугольника FAI имеем $p_3 = d_1 \sin(A + \alpha)$, также из треугольника CEF имеем $p_2 = d_3 \sin(B - \alpha)$ и, наконец, из треугольника DBF получим $p_1 = d_2 \sin CBF$, но $\angle CBF = \angle CAF = \alpha$, следовательно, $p_1 = d_2 \sin \alpha$.

Подставив эти выражения в (2), получим:

$$p = \sqrt[3]{d_1 d_2 d_3 \sin^2 \alpha \sin^2(A + \alpha) \sin^2(B - \alpha)}. \quad (3)$$

Пусть, как обычно, стороны треугольника ABC суть a , b и c . Тогда из треугольника ACF получим:

$$\frac{AF}{\sin ACF} = \frac{AC}{\sin AFC} \quad \text{или} \quad \frac{d_1}{\sin(B - \alpha)} = \frac{b}{\sin B}.$$

Также из треугольника BFA получим:

$$\frac{d_2}{\sin(A + \alpha)} = \frac{c}{\sin C}$$

(ибо $\angle BFA = C$), и, наконец, из треугольника CBF :

$$\frac{d_3}{\sin \alpha} = \frac{a}{\sin A}.$$

Так как

$$\frac{a}{\sin A} = \frac{b}{\sin B} = \frac{c}{\sin C} = 2R,$$

то мы из предыдущего легко получаем:

$$d_1 = 2R \sin(B - \alpha), \quad d_2 = 2R \sin(A + \alpha), \quad d_3 = 2R \sin \alpha.$$

Подставив это в (3) и извлекая кубический корень, получим:

$$p = 2R \sin \alpha \sin(B - \alpha) \sin(A + \alpha). \quad (4)$$

7. Применим теперь предыдущее к полному четырехстороннику. Пусть имеем четыре прямых s , t , u и v (фиг. 7), образующих полный четырехсторонник — назовем его вершины через A , B , C , D , E и I . За фокус параболы, вписанной в треугольник ABC , можно принять любую точку круга, описанного около треугольника ABC ; также за фокус параболы, вписанной в треугольник AEI , можно принять любую точку круга, описанного около треугольника AEI . Эти два круга имеют общую точку A , а потому пересекутся еще в некоторой точке F , и эта точка F будет служить фокусом для параболы, касающейся всех четырех прямых, т. е. она будет вписана не только в треугольники ABC и AEI , но и в треугольники BID и DCE . Поэтому круги, описанные около треугольника BID и около треугольника DCE , также пройдут через точку F . Итак: Четыре круга, описанные около четырех треугольников, образованных четырьмя прямыми, имеют общую точку.

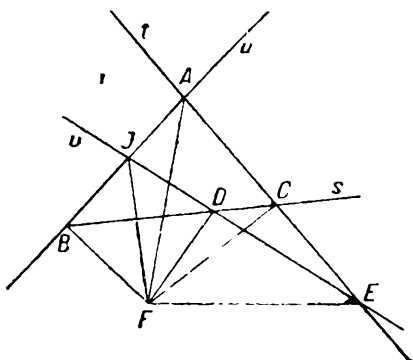
Пусть теперь $FA = d_1$, $FB = d_2$, $FC = d_3$, $FD = d_4$, $FE = d_5$, $FI = d_6$.

Пусть еще расстояние прямой s от F равно p_1 , прямой t от F равно p_2 , прямой u от F равно p_3 , и прямой v от F равно p_4 (эти перпендикуляры на чертеже не даны). Тогда параметр нашей параболы можно по формуле (2) выразить в следующих четырех формулах:

$$p = \sqrt[3]{\frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{d_1 d_2 d_3}} = \sqrt[3]{\frac{p_2^2 p_3^2 p_4^2}{d_1 d_5 d_6}} = \sqrt[3]{\frac{p_1^2 p_3^2 p_4^2}{d_2 d_4 d_6}} = \sqrt[3]{\frac{p_1^2 p_2^2 p_4^2}{d_3 d_4 d_5}}.$$

Отсюда легко получить:

$$\begin{aligned} \frac{p_1^2}{d_2 d_3} &= \frac{p_4^2}{d_5 d_6}; & \frac{p_2^2}{d_1 d_3} &= \frac{p_4^2}{d_4 d_6}; & \frac{p_3^2}{d_1 d_2} &= \frac{p_4^2}{d_4 d_5}; \\ \frac{p_2^2}{d_1 d_5} &= \frac{p_1^2}{d_2 d_4}; & \frac{p_3^2}{d_1 d_6} &= \frac{p_1^2}{d_3 d_4}; & \frac{p_3^2}{d_2 d_6} &= \frac{p_2^2}{d_3 d_5}, \end{aligned}$$



Фиг. 7.

— равенства, связывающие расстояния сторон и вершин полного четырехсторонника от фокуса вписанной в него параболы. Эти равенства легко сводятся к следующим (надо, например, знаменатели обеих частей первого равенства умножить на d_4 и т. д.):

$$\frac{p_1^2}{d_2 d_3 d_4} = \frac{p_2^2}{d_1 d_5 d_6} = \frac{p_3^2}{d_1 d_2 d_6} = \frac{p_4^2}{d_4 d_5 d_6},$$

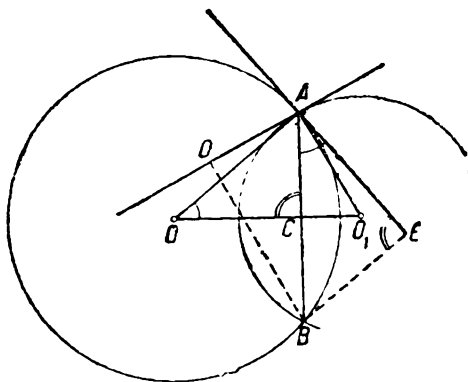
т. е. в полном четырехстороннике отношение квадрата расстояния каждой стороны от фокуса впи-

санной в этот четырехсторонник параболы к произведению расстояний от того же фокуса трех вершин этого четырехсторонника, лежащих на этой стороне, постоянно.

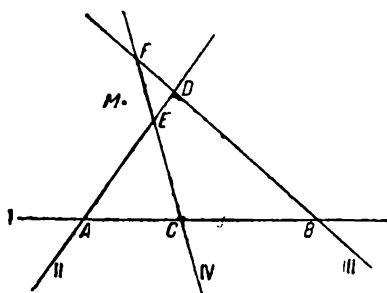
ДОБАВЛЕНИЕ

Пусть два круга O и O_1 пересекаются в точках A и B (фиг. 8). Построим в точке A касательные AD и AE к этим кругам и из точки B опустим перпендикуляры BD и BE на эти касательные. Если еще построим радиусы OA и O_1A и общую хорду AB (C — ее середина), то увидим, что $\angle BAE = \angle AOO_1$ (при помощи соответственных дуг) и, следовательно, $\triangle ABE \sim \triangle AOC$; отсюда $\frac{BE}{AC} = \frac{AB}{OA}$; следовательно, $BE = \frac{AB^2}{2OA}$ и также $BD = \frac{AB^2}{2O_1A}$, т. е. если два круга пересекаются, то расстояние одной точки пересечения от касательной к одному из этих кругов в другой точке равно квадрату общей хорды, деленному на диаметр этого круга.

Пусть имеется полный четырехугольник $I II III IV$ с вершинами A, B, C, D, E и F (фиг. 9). Им определяются четыре треугольника, и круги, описанные около них, все четыре, должны пройти через одну и ту же точку M (фокус вписанной параболы).



Фиг. 8.



Фиг. 9.

Пусть эти круги проходят:

O_1	через	DEF ;	его	радиус	r_1
O_2	"	BCF ;	"	"	r_2
O_3	"	ACE ;	"	"	r_3
O_4	"	ABD ;	"	"	r_4

Через каждую вершину полного четырехсторонника проходят два круга и в каждом из них, следовательно, имеется две касательных к этим кругам. Обозначим расстояния точки M от этих касательных по следующей схеме: через точку A — считаем ее первую — проходят касательные к кругам O_3 и O_4 ; расстояния M от этих касательных пусть будут q_{31} и q_{41} ; также для B (на кругах O_3 и O_4) — q_{32} и q_{42} ; для C — q_{23} и q_{33} ; для D — q_{14} и q_{44} ; для E — q_{15} и q_{35} ; для F — q_{16} и q_{26} . Здесь первый индекс указывает номер круга, второй — номер точки. Нетрудно затем видеть, что общие хорды наших кругов, взятых попарно, суть расстояния точки M от вершин четырехсторонника: для кругов O_1 и O_2 общая хорда есть $MF = d_6$, для O_1 и O_3 $ME = d_5$, для O_1 и O_4 $MD = d_4$, для O_2 и O_3 $MC = d_3$, для O_2 и O_4 $MB = d_2$, для O_3 и O_4 $MA = d_1$. Тогда согласно предварительному соображению для расстояний точки M от наших 12 касательных имеем:

для A : $q_{31} = \frac{d_1^2}{2r_3}$; $q_{41} = \frac{d_1^2}{2r_4}$;

для B : $q_{22} = \frac{d_2^3}{2r_\psi}$; $q_{42} = \frac{d_2^2}{2r_\psi}$;

для C : $q_{23} = \frac{d_3^2}{2r_3}$; $q_{33} = \frac{d_3^2}{2r_3}$;

для D : $q_{14} = \frac{d_4^2}{2r_1}$; $q_{44} = \frac{d_4^2}{2r_A}$;

$$\text{для } E: \quad q_{15} = \frac{d_5^2}{2r_1}; \quad q_{35} = \frac{d_5^2}{2r_3};$$

$$\text{для } F: \quad q_{16} = \frac{d_6^2}{2r_1}; \quad q_{26} = \frac{d_6^2}{2r_2}.$$

Мы имеем для полупараметра параболы:

$$p^3 = \frac{p_2^2 p_3^2 p_4^2}{d_4 d_5 d_6} = \frac{p_2^2 q_4^2 p_1^2}{d_2 d_3 d_6} = \frac{p_4^2 p_1^2 p_3^2}{d_1 d_3 d_5} = \frac{p_1^2 p_2^2 p_3^2}{d_1 d_2 d_4},$$

где p_2 , p_3 и p_4 — расстояния сторон $\triangle DEF$ от M , а d_4 , d_5 и d_6 — расстояния его вершин; применяем формулу (2). Другие выражения получаются из треугольников BCF , ACE и ABD . Но произведение $p_2 p_3 p_4$ равно произведению расстояний точки M от касательных к кругу O_1 в точках D , E и F , т. е.

$$p_2 p_3 p_4 = q_{14} q_{15} q_{16};$$

также

$$p_3 p_4 p_1 = q_{22} q_{23} q_{26}; \quad p_4 p_1 p_2 = q_{31} q_{33} q_{35}; \quad p_1 p_2 p_3 = q_{41} q_{42} q_{44}.$$

Поэтому

$$p^3 = \frac{q_{14}^2 q_{15}^2 q_{16}^2}{d_4 d_5 d_6} = \frac{q_{22}^2 q_{23}^2 q_{26}^2}{d_2 d_3 d_4} = \frac{q_{31}^2 q_{33}^2 q_{35}^2}{d_1 d_3 d_5} = \frac{q_{41}^2 q_{42}^2 q_{44}^2}{d_1 d_2 d_4}.$$

Заменяя все q через d и r , получим:

$$p^3 = \frac{d_4^4 d_5^4 d_6^4}{8r_1^6 d_4 d_5 d_6} = \frac{d_2^4 d_3^4 d_6^4}{8r_2^6 d_2 d_3 d_6} = \frac{d_1^4 d_3^4 d_5^4}{8r_3^6 d_1 d_3 d_5} = \frac{d_1^4 d_2^4 d_4^4}{8r_4^6 d_1 d_2 d_4}.$$

Отсюда легко получим:

$$\frac{1}{2p} = \frac{r_1^2}{d_4 d_5 d_6} = \frac{r_2^2}{d_2 d_3 d_6} = \frac{r_3^2}{d_1 d_3 d_5} = \frac{r_4^2}{d_1 d_2 d_4};$$

$$r_1 = \sqrt{\frac{d_4 d_5 d_6}{2p}}; \quad r_2 = \sqrt{\frac{d_2 d_3 d_6}{2p}}; \quad r_3 = \sqrt{\frac{d_1 d_3 d_5}{2p}}; \quad r_4 = \sqrt{\frac{d_1 d_2 d_4}{2p}}.$$

Итак:

1) Квадраты радиусов кругов, описанных около четырех треугольников, определяемых полным четырехсторонником, пропорциональны произведениям расстояний фокуса параболы, вписанной в этот четырехсторонник, от трех его вершин, расположенных на соответствующем круге.

2) Радиус круга, описанного около одного из четырех треугольников, определяемых полным четырехсторонником, равен квадратному корню из частного от деления произведения расстояний фокуса вписанной в этот четырехсторонник параболы от трех вершин этого четырехсторонника, лежащих на этом круге, на полупараметр этой параболы.

РЕЛЯТИВНОЕ ИНТЕГРИРОВАНИЕ

С. Е. Вихман (Москва)

Рассмотрим функцию $y = f(x)$, однозначно определенную на отрезке $[a, b]$, не содержащем нуля, и дадим аргументу x приращение Δx : $\Delta x = x_2 - x_1$.

Величину $\frac{\Delta x}{\xi} = \frac{x_2 - x_1}{\xi}$, где $x_1 \leq \xi \leq x_2$, назовем релятивным приращением аргумента x и обозначим ϱx .

Аналогично, величину $\frac{f(x_2) - f(x_1)}{f(\xi)}$, где $x_1 \leq \xi \leq x_2$, будем называть релятивным приращением функции $f(x)$ и обозначать ϱf или $\varrho f(x)$.

§ 1. ОПРЕДЕЛЕННЫЙ РЕЛЯТИВНЫЙ ИНТЕГРАЛ

Функция $f(x)$ определена на отрезке $[a, b]$, не включающем числа нуль. Разделим этот отрезок произвольными точками $x_0 = a, x_1, x_2, \dots, x_n = b$ на n частичных отрезков и обозначим релятивное приращение x на ν -м отрезке через ϱx_ν :

$$\varrho x_\nu = \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{\xi_\nu} \quad (x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu).$$

Составим произведение:

$$R_n = \prod_{\nu=1}^n [1 + f(\xi_\nu) \cdot \varrho x_\nu]. \quad (1)$$

Пусть наибольшее из релятивных приращений ϱx_ν стремится к нулю. Предел произведения R_n при этом условии — если только он существует — назовем релятивным определенным интегралом функции $f(x)$ в пределах от a до b и условимся изображать его $\overset{b}{\underset{a}{R}}[1 + f(x)rx]$:

$$\overset{b}{\underset{a}{R}}[1 + f(x)rx] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{\nu=1}^n [1 + f(\xi_\nu) \cdot \varrho x_\nu].$$

Возможно в качестве интегрального произведения принять:

$$R_n = \prod_{\nu=1}^n \left[1 + f(\eta_\nu) \frac{x_\nu - x_{\nu-1}}{\xi_\nu} \right] \quad \begin{matrix} (x_{\nu-1} \leq \eta_\nu \leq x_\nu) \\ (x_{\nu-1} \leq \xi_\nu \leq x_\nu). \end{matrix}$$

Пользование этим произведением не потребует существенных изменений в дальнейшем построении теории релятивного интеграла.

Теорема 1. Релятивный определенный интеграл

$$\overset{b}{\underset{a}{R}}[1 + f(x)rx]$$

существует, если функция $\frac{f(x)}{x}$ непрерывна на отрезке $[a, b]$.

Доказательство. Обозначим функцию $\frac{f(x)}{x}$ через $\varphi(x)$ и предположим, что наибольшее значение на ν -м частичном отрезке функция $\varphi(x)$ принимает в точке μ_ν , а наименьшее — в точке η_ν .

Обозначим далее:

$$R_n = \prod_{\nu=1}^n [1 + \varphi(\xi_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})],$$

$$\bar{R}_n = \prod_{\nu=1}^n [1 + \varphi(\mu_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})],$$

$$\underline{R}_n = \prod_{\nu=1}^n [1 + \varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})].$$

Очевидно, что

$$\underline{R}_n \leq R_n \leq \bar{R}_n.$$

Отсюда следует:

$$\frac{\bar{R}_n}{\underline{R}_n} \geq 1.$$

Но

$$\begin{aligned} \frac{\bar{R}_n}{\underline{R}_n} &= \prod_{\nu=1}^n \left[\frac{1 + \varphi(\mu_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})}{1 + \varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})} \right] = \\ &= \prod_{\nu=1}^n \left[1 + \frac{\varphi(\mu_\nu) - \varphi(\eta_\nu)}{1 + \varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})} (x_\nu - x_{\nu-1}) \right]. \end{aligned}$$

Если $\varphi(x)$ непрерывна (и, стало быть, ограничена) на отрезке $[a, b]$, то при достаточно большом n всегда найдется число l такое, что

$$0 < l < 1 + \varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1}).$$

Имея в виду это обстоятельство, легко получим неравенство:

$$\frac{\bar{R}_n}{\underline{R}_n} < \prod_{\nu=1}^n \left[1 + \frac{\delta}{l} (x_\nu - x_{\nu-1}) \right],$$

где δ — наибольшее из колебаний функции $\varphi(x)$ в частичных отрезках:

$$\delta = \max [\varphi(\mu_\nu) - \varphi(\eta_\nu)] \quad (\nu = 1, 2, \dots, n).$$

Известно, что если в некотором произведении сомножители переменны, но сумма их постоянна, то максимум произведения имеет место тогда, когда все сомножители равны между собой. Заключаем отсюда, что

$$\prod_{\nu=1}^n \left[1 + \frac{\delta}{l} (x_\nu - x_{\nu-1}) \right] \leq \left[1 + \frac{\delta}{l} \cdot \frac{b-a}{n} \right]^n.$$

Итак:

$$\frac{\bar{R}_n}{\underline{R}_n} < \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta}{l} (b-a) \right]^n,$$

откуда

$$1 \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{R}_n}{\underline{R}_n} \leq \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{1}{n} \cdot \frac{\delta}{l} (b-a) \right]^n = e^{\delta \frac{b-a}{l}}.$$

Но, в силу равномерной непрерывности функции $\varphi(x)$, при $n \rightarrow \infty$ наибольшее колебание в частичном отрезке $\delta \rightarrow 0$, а так как

$$\lim_{\delta \rightarrow 0} e^{\delta \frac{b-a}{l}} = 1,$$

то, следовательно:

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\bar{R}_n}{\underline{R}_n} = 1.$$

Отсюда заключаем, что пределы верхнего \bar{R}_n и нижнего \underline{R}_n произведений, а также предел произведения R_n равны между собой, если только эти пределы существуют.

В силу только что сказанного достаточно показать существование предела \underline{R}_n .

Рассмотрим произвольную последовательность произведений $\underline{R}_1, \underline{R}_2, \dots, \underline{R}_n, \dots, \underline{R}_m, \dots$, а также произведение \underline{R}_l , совокупность точек подразделения которого включает в себя все точки подразделения произведений \underline{R}_n и \underline{R}_m . Покажем, что при n и $m > N$:

$$|\underline{R}_n - \underline{R}_l| < \varepsilon, \quad |\underline{R}_m - \underline{R}_l| < \varepsilon.$$

Для этого посмотрим, как изменяется произведение \underline{R}_n , если к имеющимся n точкам подразделения добавить k новых точек. Положим, что в ν -й отрезок, которому в произведении \underline{R}_n соответствовал множитель

$$[1 + \varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})],$$

попало $(r-1)$ новых точек $x'_\nu, x''_\nu, \dots, x^{(r-1)}_\nu$; образовавшимся при этом r отрезкам будут соответствовать в произведении \underline{R}_{n+k} r новых множителей:

$$[1 + \varphi(\eta'_\nu)(x'_\nu - x_{\nu-1})] [1 + \varphi(\eta''_\nu)(x''_\nu - x_\nu)] \dots \\ \dots [1 + \varphi(\eta^{(r)}_\nu)(x_\nu - x^{(r-1)}_\nu)],$$

где $\eta'_\nu, \eta''_\nu, \dots, \eta^{(r)}_\nu$ суть точки минимума функции $\varphi(x)$ в новых частичных отрезках. Очевидно, что $\varphi(\eta'_\nu), \varphi(\eta''_\nu), \dots, \varphi(\eta^{(r)}_\nu) \geq \varphi(\eta_\nu)$.

Раскрывая скобки, убеждаемся в том, что

$$[1 + \varphi(\eta'_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})] \dots [1 + \varphi(\eta^{(r)}_\nu)(x_\nu - x^{(r-1)}_\nu)] > \\ > [1 + \varphi(\eta_\nu)(x_\nu - x_{\nu-1})],$$

и, следовательно,

$$\underline{R}_{n+k} > \underline{R}_n,$$

т. е. нижние произведения \underline{R}_n возрастают с ростом n .

Однако произведение $\underline{R}_n = \prod_{r=1}^n [1 + \varphi(\eta_r)(x_r - x_{r-1})]$ ограничено сверху при $n \rightarrow \infty$ в предположении, что $\frac{f(x)}{x} = \varphi(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$. Пусть $M > \frac{f(x)}{x} (a \leq x \leq b)$ — некоторая постоянная. Тогда

$$\underline{R}_n < \prod_{r=1}^n [1 + M(x_r - x_{r-1})] < \left[1 + M \frac{b-a}{n}\right],$$

а, следовательно, для всех значений n

$$\underline{R}_n < e^{M(b-a)}.$$

Если число частичных отрезков n в произведении \underline{R}_n увеличивать так, чтобы новые точки помещались в отрезках между ранее нанесенными, то \underline{R}_n будет монотонно возрастать, оставаясь ограниченным сверху, и, следовательно, будет стремиться к единственному пределу.

Возвращаясь к произведению \underline{R}_m , \underline{R}_n и $\underline{R}_\varepsilon$, на основании полученных результатов заключаем:

$$|\underline{R}_n - \underline{R}_l| < \frac{\varepsilon}{2}, \quad |\underline{R}_m - \underline{R}_l| < \frac{\varepsilon}{2},$$

когда m и n больше N ($N = N(\varepsilon)$).

Из этих двух неравенств вытекает третье:

$$|\underline{R}_m - \underline{R}_n| < \varepsilon,$$

являющееся (по Коши) доказательством существования предела у последовательности $\underline{R}_1, \underline{R}_2, \dots, \underline{R}_n, \dots, \underline{R}_m, \dots$, составленной по любому закону.

Этим доказывается существование предела произведения R_n .

§ 2. ВЫЧИСЛЕНИЕ РЕЛЯТИВНЫХ ОПРЕДЕЛЕННЫХ ИНТЕГРАЛОВ В ПРОСТЕЙШИХ СЛУЧАЯХ

Теорема 1 дает нам право применять при вычислении релятивных определенных интегралов различные способы подразделения отрезка и выбора точек ξ , в зависимости от характера подынтегральной функции.

Релятивное интегрирование функции $f(x) = x$. Частичные отрезки берем равными друг другу:

$$\Delta x_r = \Delta x = \frac{b-a}{n},$$

а точки ξ_v выбираем где угодно в частичных отрезках. Тогда

$$\begin{aligned} {}^b_a R[1 + xrx] &= \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n [1 + \xi_v \varrho x_v] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n \left[1 + \xi_v \frac{b-a}{n\xi_v} \right] = \\ &= \lim_{n \rightarrow \infty} \left[1 + \frac{b-a}{n} \right]^n = e^{b-a}, \end{aligned}$$

окончательно:

$${}^b_a R[1 + xrx] = \frac{e^b}{e^a}. \quad (2)$$

Релятивное интегрирование функции $f(x) = \beta$, где β — любое действительное число. Отрезок $[a, b]$ разбиваем точками x_0, \dots, x_n так, чтобы

$$\frac{x_v}{x_v - 1} = q \quad (v = 1, 2, \dots, n),$$

тогда

$$q = \sqrt[n]{\frac{b}{a}}.$$

Точку ξ_v каждого частичного отрезка выбираем, удовлетворяя условию:

$$\varrho x_v = \frac{x_v - x_{v-1}}{\xi_v} = \ln \frac{x_v}{x_{v-1}} = \ln q = \frac{1}{n} \ln \frac{b}{a},$$

что всегда возможно в силу теоремы Лагранжа.

Обратимся теперь к определению релятивного интеграла:

$${}^b_a R[1 + \beta rx] = \lim_{n \rightarrow \infty} \prod_{v=1}^n [1 + \beta \varrho x_v].$$

Подставим в него найденное значение ϱx_v :

$${}^b_a R[1 + \beta rx] = \lim \left[1 + \frac{1}{n} \beta \ln \frac{b}{a} \right]^n = e^{\beta \ln \frac{b}{a}} = \left(\frac{b}{a} \right)^\beta.$$

Итак,

$${}^b_a R[1 + \beta rx] = \left(\frac{b}{a} \right)^\beta; \quad (3)$$

в частности при $\beta = 0$

$${}^b_a R[1 + 0 \cdot rx] = 1,$$

а при $\beta = 1$

$${}^b_a R[1 + rx] = \frac{b}{a}.$$

Обе формулы легко получить непосредственно.

§ 3. ТЕОРЕМА О СРЕДНЕМ ЗНАЧЕНИИ И ОСНОВНЫЕ СВОЙСТВА ОПРЕДЕЛЕННЫХ РЕЛЯТИВНЫХ ИНТЕГРАЛОВ

Теорема 2. Если функция $f(x)$ непрерывна на отрезке $[a, b]$, то:

$$\mathop{R}\limits_a^b [1 + f(x)rx] = \left(\frac{b}{a}\right)^{f(\xi)}, \quad (4)$$

где $a \leq \xi \leq b$.

Доказательство. Пусть M — наибольшее, m — наименьшее значение функции $f(x)$ на отрезке $a \leq x \leq b$. Тогда, очевидно:

$$\mathop{R}\limits_a^b [1 + Mrx] \geq \mathop{R}\limits_a^b [1 + f(x)rx] \geq \mathop{R}\limits_a^b [1 + mrx]$$

и

$$\left(\frac{b}{a}\right)^M \geq \mathop{R}\limits_a^b [1 + f(x)rx] \geq \left(\frac{b}{a}\right)^m.$$

Следовательно:

$$\mathop{R}\limits_a^b [1 + f(x)rx] = \left(\frac{b}{a}\right)^\mu, \quad \text{где } m \leq \mu \leq M.$$

Если $f(x)$ — непрерывная функция, то существует значение

$$x = \xi (a \leq \xi \leq b)$$

такое, что $f(\xi) = \mu$, откуда непосредственно получаем формулу (4).

Из определения релятивного определенного интеграла следует, что

$$\mathop{R}\limits_a^b [1 + f(x)rx] = \mathop{R}\limits_a^c [1 + f(x)rx] \cdot \mathop{R}\limits_c^b [1 + f(x)rx], \quad (5)$$

если $a < c < b$.

Пользуясь этой формулой и теоремой 2, докажем теорему о перестановке пределов в релятивном определенном интеграле.

Теорема 3. При перестановке пределов интегрирования релятивный интеграл принимает обратное значение:

$$\mathop{R}\limits_a^b \cdot \mathop{R}\limits_b^a = 1,$$

где сокращенно обозначено

$$\mathop{R}\limits_a^b = \mathop{R}\limits_a^b [1 + f(x)rx], \quad \mathop{R}\limits_b^a = \mathop{R}\limits_b^a [1 + f(x)rx].$$

Доказательство. По формуле (5):

$$\mathop{R}\limits_a^b = \mathop{R}\limits_a^{x_1} \cdot \mathop{R}\limits_{x_1}^{x_2} \dots \mathop{R}\limits_{x_{n-1}}^b, \quad \mathop{R}\limits_b^a = \mathop{R}\limits_b^{x_{n-1}} \cdot \mathop{R}\limits_{x_{n-1}}^{x_{n-2}} \dots \mathop{R}\limits_{x_1}^a.$$

Отсюда получаем:

$$R \cdot R = \prod_{v=1}^n R_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}} \cdot R_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}}.$$

Применим теорему 2 к интегралам $R_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}}$ и $R_{\frac{a}{b}}^{\frac{b}{a}}$. Имеем:

$$\begin{aligned} R \cdot R &= \prod_{v=1}^n \left(\frac{x_v}{x_{v-1}} \right)^{f(\xi_v)} \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{f(\eta_v)} = \\ &= \prod_{v=1}^n \left(\frac{x_v}{x_{v-1}} \right)^{f(\xi_v)} \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{f(\xi_v)} \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{f(\eta_v) - f(\xi_v)} = \\ &= \prod_{v=1}^n \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{f(\eta_v) - f(\xi_v)}, \end{aligned}$$

где

$$x_{v-1} \leq \xi_v \leq x_v, \quad x_{v-1} \leq \eta_v \leq x_v.$$

Если

$$\begin{aligned} \delta &= \max [f(\eta_v) - f(\xi_v)], \\ \delta' &= \min [f(\eta_v) - f(\xi_v)], \end{aligned} \quad (v = 1, 2, \dots, n)$$

то при $a < b$:

$$\prod_{v=1}^n \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{\delta} \leq \prod_{v=1}^n \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{f(\eta_v) - f(\xi_v)} \leq \prod_{v=1}^n \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{\delta'}.$$

Но

$$\prod_{v=1}^n \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{\delta} = \left(\frac{a}{b} \right)^{\delta} \quad \text{и} \quad \prod_{v=1}^n \left(\frac{x_{v-1}}{x_v} \right)^{\delta'} = \left(\frac{a}{b} \right)^{\delta'},$$

и мы получаем:

$$\left(\frac{a}{b} \right)^{\delta} \leq R \cdot R \leq \left(\frac{a}{b} \right)^{\delta'}$$

при всех значениях n . Однако с ростом n $\delta \rightarrow 0$, и потому

$$R \cdot R = 1,$$

ч. т. д.

Следствие. Формула (5) справедлива независимо от относительного расположения точек a , b , c . Например, если $c > b > a$, то

$$R \cdot R = R \cdot R = R \cdot R. \quad (6)$$

§ 4. РЕЛЯТИВНАЯ ПРОИЗВОДНАЯ И РЕЛЯТИВНАЯ ПРИМИТИВНАЯ

Определение. Значением релятивной производной функции $f(x)$ в точке x мы назовем предел отношения релятивного приращения $\varrho f(x)$ функции к релятивному приращению ϱx аргумента, когда последнее стремится к нулю.

$$\lim_{\varrho x \rightarrow 0} \frac{\varrho y}{\varrho x} = \frac{ry}{rx}.$$

Очевидно, что

$$\frac{ry}{rx} = \frac{x}{y} \frac{dy}{dx} \quad 1). \quad (7)$$

Применяя формулу (7), получим следующую табличку формул релятивного дифференцирования:

$$1) \quad \frac{ry}{rx} = \frac{ry}{rt} \cdot \frac{rt}{rx}, \quad [y = \varphi(t), \quad t = \psi(x)], \quad (8)$$

$$2) \quad \frac{rx}{ry} = \frac{1}{\frac{ry}{rx}},$$

$$3) \quad \frac{rC}{rx} = 0,$$

$$4) \quad \frac{r}{rx} Cx = 1,$$

$$5) \quad \frac{r}{rx} x^a = a \quad (a — \text{любое действительное число}),$$

$$6) \quad \frac{r}{rx} (uv) = \frac{ru}{rx} + \frac{rv}{rx},$$

$$7) \quad \frac{r}{rx} \left(\frac{u}{v} \right) = \frac{ru}{rx} - \frac{rv}{rx},$$

$$8) \quad \frac{r}{rx} e^x = x.$$

Теорема 4. Если функция $F(x)$ непрерывна на отрезке $a \leq x \leq b$ и релятивно-дифференцируема во всех его внутренних точках, то существует по крайней мере одно значение ξ ($a < \xi < b$) такое, что

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \left(\frac{b}{a} \right)^{f(\xi)}, \quad (9)$$

где

$$f(x) = \frac{r}{rx} F(x).$$

Доказательство. Применяя теорему Коши к выражению

$$\frac{\ln F(b) - \ln F(a)}{\ln b - \ln a},$$

1) Если $\frac{ry}{rx}$ при частном значении $x = x_1$ становится неопределенным, то за значение релятивной производной в этой точке принимается предел выражения $\frac{x}{y} \frac{dy}{dx}$ при $x \rightarrow x_1$.

получаем:

$$\frac{\ln F(b) - \ln F(a)}{\ln b - \ln a} = \frac{\frac{F'(\xi)}{F(\xi)}}{\frac{1}{\xi}} = \frac{\xi}{F(\xi)} F'(\xi) = f(\xi) \quad (a < \xi < b),$$

отсюда

$$\ln \frac{F(b)}{F(a)} = f(\xi) \ln \frac{b}{a},$$

и, после потенцирования, окончательно:

$$\frac{F(b)}{F(a)} = \left(\frac{b}{a} \right)^{f(\xi)},$$

ч. т. д.

Определение. Релятивной примитивной от данной функции $f(x)$ называется такая функция $R(x)$, релятивная производная которой равна $f(x)$:

$$\frac{r}{rx} R(x) = f(x).$$

Ясно, что если $R(x)$ есть примитивная от $f(x)$, то всякая функция $R_1(x) = CR(x)$, где C — постоянная, также будет примитивной от $f(x)$.

Теорема 5. Отношение двух примитивных от одной и той же функции есть постоянное число.

Доказательство. Рассмотрим две примитивные $R(x)$ и $P(x)$ от функции $f(x)$. Их отношение $\frac{R(x)}{P(x)}$ представляет собой функцию от x , релятивная производная которой равна нулю:

$$\frac{r}{rx} \left[\frac{R(x)}{P(x)} \right] = f(x) - f(x) = 0.$$

Дадим x значения $x = x_1$ и $x = x_2$ и применим теорему 4 к функции $\frac{R(x)}{P(x)}$:

$$\frac{\frac{R(x_1)}{P(x_1)}}{\frac{R(x_2)}{P(x_2)}} = \left(\frac{x_1}{x_2} \right)^0 = 1,$$

откуда

$$\frac{R(x_1)}{P(x_1)} = \frac{R(x_2)}{P(x_2)},$$

ч. т. д.

Множество функций, релятивно-примитивных для данной, образуют семейство функций, отличающихся постоянными множителями.

§ 5. Теорема о релятивном дифференцировании по верхнему пределу и релятивный неопределенный интеграл.

Полагая в релятивном определенном интеграле

$$R = \int_a^b [1 + f(x)rx]$$

верхний предел b переменным, заметим, что R будет функцией своего верхнего предела:

$$R(x) = \overset{x}{R}[1 + f(x)rx].$$

Теорема 6. Релятивная производная по верхнему пределу от релятивного определенного интеграла равна подинтегральной функции от верхнего предела.

Доказательство. Возьмем число $h > 1$ и составим выражение

$$\frac{\frac{R(hx) - R(x)}{R(x)}}{\frac{hx - x}{x}} = \frac{\frac{R(hx)}{R(x)} - 1}{h - 1}.$$

Согласно определению, предел этого выражения при $h \rightarrow 1$ будет релятивной производной от $R(x)$.

По формуле (6):

$$\frac{R(hx)}{R(x)} = \frac{\overset{hx}{R}[1 + f(x)rx]}{\overset{x}{R}[1 + f(x)rx]} = \overset{hx}{R}[1 + f(x)rx],$$

а на основании теоремы 2:

$$\overset{hx}{R}[1 + f(x)rx] = h^{f(\xi)} \quad (x \leq \xi \leq hx).$$

Итак,

$$\frac{r}{rx} R(x) = \lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^{f(\xi)} - 1}{h - 1}.$$

Полученную неопределенность $\frac{0}{0}$ раскрываем по правилу Лопиталю, имея в виду, что ξ есть функция от h : $\xi = \xi(h)$.

$$\lim_{h \rightarrow 1} \frac{h^{f(\xi(h))} - 1}{h - 1} = \lim_{h \rightarrow 1} [f(\xi) h^{f(\xi) - 1} + h^{f(\xi)} \ln h \cdot f'_h(\xi)] = f(\xi),$$

так как $\lim_{h \rightarrow 1} \ln h = 0$. Наконец, при $h = 1$, $\xi = x$ и окончательно:

$$\frac{r}{rx} \overset{x}{R}[1 + f(x)rx] = f(x), \quad (10)$$

ч. т. д.

Таким образом релятивный определенный интеграл с переменным верхним пределом есть релятивная примитивная от своей подинтегральной функции. Семейство релятивных примитивных от функции $f(x)$ назовем релятивным неопределенным интегралом и обозначим:

$$R[1 + f(x)rx].$$

Любая релятивная примитивная от $f(x)$ может быть согласно теореме 5 представлена в виде:

$$R(x) = C \overset{x}{R}_a [1 + f(x)rx].$$

Вследствие этого

$$\overset{b}{R}_a [1 + f(x)rx] = \frac{R(b)}{R(a)}. \quad (11)$$

Действительно,

$$R(b) = C \overset{b}{R}_a [1 + f(x)rx], \quad R(a) = C \overset{a}{R}_a [1 + f(x)rx],$$

$$\frac{R(b)}{R(a)} = C \overset{b}{R}_a [1 + f(x)rx] \cdot \frac{1}{C} \overset{a}{R}_a [1 + f(x)rx] = \overset{b}{R}_a [1 + f(x)rx].$$

Значения релятивных неопределенных интегралов простейших функций легко получить обращением формул (8):

$$\begin{aligned} R[1 + 0 \cdot rx] &= C, \\ R[1 + rx] &= Cx, \\ R[1 + arx] &= Cx^a, \\ R[1 + \{\varphi(x) + \psi(x)\}rx] &= R[1 + \varphi(x)rx] \cdot R[1 + \psi(x)rx], \\ R[1 + \{\varphi(x) - \psi(x)\}rx] &= \frac{R[1 + \varphi(x)rx]}{R[1 + \psi(x)rx]}, \\ R[1 + xrx] &= Ce^x. \end{aligned}$$

О РАСХОДИМОСТИ ГАРМОНИЧЕСКОГО РЯДА

М. С. Бритман (УССР, Николаев)

Кроме обычных доказательств расходимости гармонического ряда

$$1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \dots,$$

которые можно найти во многих курсах анализа бесконечно малых, существует еще одно мало известное доказательство расходимости этого ряда.

Изложим это доказательство.

Группируя члены гармонического ряда, можно его представить в виде:

$$\begin{aligned} 1 + \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} \right] + \left[\frac{1}{5} + \frac{1}{6} + \dots + \frac{1}{25} \right] + \\ + \dots + \left[\frac{1}{m} + \frac{1}{m+1} + \dots + \frac{1}{m^2} \right] + \\ + \left[\frac{1}{m^2+1} + \frac{1}{m^2+2} + \dots + \frac{1}{(m^2+1)^2} \right] + \dots \end{aligned} \quad (1)$$

Докажем, что каждая сумма в скобках больше единицы.

С этой целью рассмотрим сумму

$$S = \frac{1}{a} + \frac{1}{a+1} + \frac{1}{a+2} + \dots + \frac{1}{a^2},$$

где a — какое-нибудь целое положительное число, большее единицы.

Заметим прежде всего, что в этой сумме число всех слагаемых, кроме первого, $a^2 - a$.

Нетрудно сообразить, что

$$\begin{aligned} S &> \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} + \frac{1}{a^2} + \dots + \frac{1}{a^2} = \frac{1}{a} + \frac{1}{a^2} (a^2 - a) = \\ &= \frac{1}{a} + 1 - \frac{1}{a} = 1; \end{aligned}$$

Итак, $S > 1$.

Так как в ряде (1) каждая сумма в квадратных скобках больше единицы и таких сумм неограниченное множество, то в этом ряде можно взять столько членов, что их сумма превзойдет произвольно выбранное положительное число.

Расходимость гармонического ряда, таким образом, доказана.

Дадим еще другое доказательство.

Обозначив через S_m сумму m первых членов гармонического ряда, предположим, что

$$\lim_{m \rightarrow \infty} S_m = S,$$

где S — некоторое определенное число (конечное). Возьмем какое-нибудь положительное число $\varepsilon < \frac{1}{2}$. Очевидно, можно найти такое целое положительное число m , что при $p > m$ будем иметь:

$$S - S_p < \varepsilon.$$

Так как

$$S_{2p} - S_p < S - S_p,$$

то

$$S_{2p} - S_p < \frac{1}{2}.$$

Это неравенство невозможно, потому что

$$\begin{aligned} S_{2p} - S_p &= \frac{1}{p+1} + \frac{1}{p+2} + \frac{1}{p+3} + \dots + \frac{1}{2p} > \\ &> \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \frac{1}{2p} + \dots + \frac{1}{2p} = \frac{p}{2p} = \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Ясно, что сделанное нами предположение о том, что частные суммы гармонического ряда имеют конечный предел, является неверным. Отсюда заключаем, что гармонический ряд расходящийся.

ОДИН ПРОСТОЙ СПОСОБ ГЕОМЕТРИЧЕСКОГО ПОСТРОЕНИЯ ПАРАБОЛЫ ВТОРОГО ПОРЯДКА И СВЯЗАННОЕ С НИМ ПОСТРОЕНИЕ ПАРАБОЛЫ НЕЙЛЯ

Г. Ключарев (г. Куйбышев)

Существует весьма много способов геометрического построения параболы второго порядка, в основу которых положены те или иные свойства кривой. Некоторые из этих способов отличаются большой простотой и удобны на практике, в силу чего они широко и заслуженно распространены. Настоящей заметкой мне хочется обратить внимание читателей сборников на сравнительно мало распространенный способ построения параболы с помощью вспомогательной прямой. Он тоже очень прост. Если пользоваться прямым углом, то для построения какой-нибудь точки параболы по этому способу нужно провести всего три линии. Базируясь же на нем, можно дать весьма простое построение параболы Нейля, кривой, тесно связанной с параболой второго порядка.

1. Проведем прямую AB параллельно оси OY на расстоянии a от этой оси (фиг. 1).

На AB возьмем произвольную точку M и через нее проведем прямые MO и MN , последнюю перпендикулярно к OY . Проведем затем через начало координат перпендикуляр к MO до пересечения с MN в точке P . Тогда точка P будет точкой параболы с вершиной в начале координат, осью симметрии OX и параметром $\frac{a}{2}$.

Доказательство почти очевидно. Обозначим координаты точки P через x и y . Уравнение прямой AB будет $x = -a$, причем в соответствии с чертежом здесь $a > 0$. Из прямоугольного треугольника MOP найдем, что

$$ON^2 = MN \cdot NP$$

и, так как

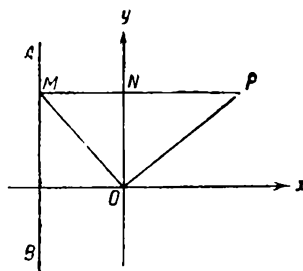
$$ON = y, \quad MN = a \quad \text{и} \quad NP = x,$$

получим:

$$y^2 = ax.$$

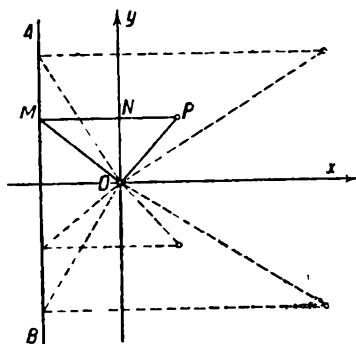
Отсюда видно, что точка P принадлежит указанной параболе.

Если парабола дана своею вершиной, осью и какой-нибудь точкой, то для построения скольких угодно точек кривой нужно прежде всего построить вспомогательную прямую AB . Для этого через данную точку, допустим P , проводим параллельно оси параболы прямую PN . Соединив вершину O параболы с точкой P прямой OP , проводим к последней через O перпендикуляр. Он пересечет прямую PN в точке M , принадлежащей AB . Перпендикуляр из M на ось OX и будет прямой AB . Затем для построения точек параболы повторяем построение фиг. 1 столько раз, сколько нужно построить точек.



Фиг. 1.

Построение нескольких точек параболы для этого случая дано на фиг. 2. На нем сплошными линиями показано построение вспомогательной прямой AB и пунктиром — построение точек искомой параболы.



Фиг. 2.

2. Посмотрим теперь, как нужно дополнить фиг. 1 для построения точки параболы Нейля.

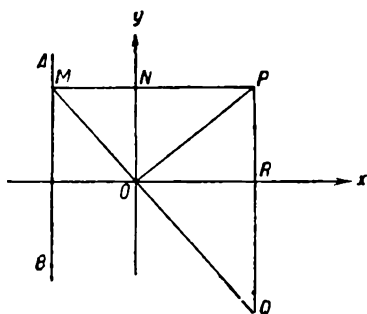
Проведем через точку P параллель оси OY и продолжим прямую OM до пересечения с этой параллелью в точке Q (фиг. 3). Тогда точка Q принадлежит параболы Нейля с вершиной в начале координат и осью симметрии OX .

В самом деле, пусть координаты точки Q суть x и y . Из прямоугольного треугольника PQO видим, что

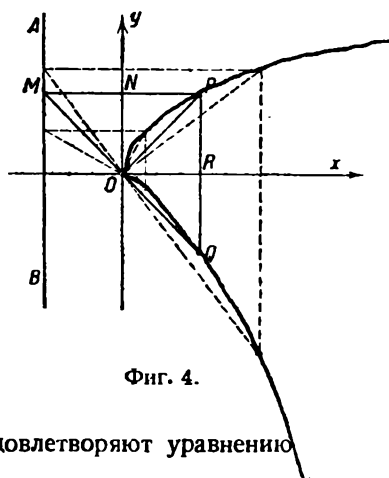
$$QR \cdot RP = OR^2.$$

Но

$$QR = y, \quad RP = \sqrt{ax}, \quad OR = x.$$



Фиг. 3.



Фиг. 4.

Следовательно, координаты точки Q удовлетворяют уравнению

$$y\sqrt{ax} = x^2,$$

или уравнению

$$y^2 = \frac{1}{a} x^3,$$

а это — парабола Нейля.

Если эта парабола дана вершиной (особая точка кривой), осью симметрии и еще какой-нибудь точкой, то для построения кривой необходимо воспроизвести фиг. 3 в обратном порядке, т. е. сначала построить точку параболы второго порядка и вспомогательную прямую, а затем уже сколько угодно точек кривой.

Построение нескольких точек кривой в этом случае дано на фиг. 4. Как и для параболы второго порядка, здесь вспомогательное построение показано сплошными линиями, а основное — пунктиром.

К ТЕОРИИ РЕШЕНИЯ УРАВНЕНИЙ И НЕРАВЕНСТВ

Д. А. Крыжановский (Одесса)

1. Неравенства, их свойства и способы их решения занимают в обычных курсах элементарной алгебры крайне скромное место, а в последнее время часто даже совсем выпадали из поля зрения школьных программ по алгебре. А между тем в деле изучения реального мира и воздействия на него неравенства являются по существу столь же важным средством, как и равенства (включая уравнения).

Недооценивание роли неравенств сказывается, между прочим, в том обособленном, изолированном положении, какое их теория занимает в курсах алгебры, вне всякой связи с теорией тождеств и уравнений. А между тем наличие многочисленных аналогий между свойствами тех и других делает весьма целесообразным совместное их изучение, которое вполне возможно, как будет показано ниже.

2. Обычно вопросы относительно равенства и неравенства ставятся в такой форме (большие буквы A , B , C и т. д. означают здесь и в дальнейшем любые алгебраические выражения, содержащие либо только числа и знаки действий, либо также и буквы):

Iа. Доказать справедливость данного числового равенства вида $A = B$.

Iб. Доказать справедливость тождества вида $A \equiv B$ (где по крайней мере одно из выражений A , B содержит одну или несколько букв) по отношению ко всем допустимым по условию значениям этих букв.

Iв. Найти все корни уравнения $A = B$, т. е. все те значения букв, входящих в A и в B (или в одно из них), которые обращают это уравнение в числовое справедливое равенство.

IIа. Доказать, что $A > B$ (либо, что $A < B$), где A и B — данные числовые выражения.

IIб. Доказать, что при всех допустимых по условию значениях букв (или тождественно) $A > B$ (либо, что всегда $A < B$).

IIв. Найти все значения букв, входящих в A и в B , при которых $A > B$ (либо $A < B$), иначе говоря, решить условное неравенство указанного вида.

Обратим внимание на то, что в задачах Iа, Iб, IIа, IIб автору задачи заранее известно, что имеет место определенное соотношение (вида $A = B$, или вида $A > B$, или вида $A < B$), притом при любых (из числа допустимых) значениях букв, входящих в выражениях A и B , если таковые буквы имеются, а от решающего задачу требуется только доказать справедливость соответствующего утверждения.

Между тем несравненно более естественной и полезной (ибо причает к самостоятельному решению и исследованию новых вопросов) представляется постановка вопросов, не предполагающая никаких предварительных знаний решения со стороны вопрошающего:

а) Даны два числовых выражения A и B ; установить, какое из трех единственно возможных соотношений:

$$A > B, A = B, A < B$$

имеет место.

б) Выражение A и B (или одно из них) содержат одну или несколько букв; разбить все допустимые по условию (например, все целые или все положительные) числовые значения этой буквы или же все допустимые системы (комбинации) числовых значений этих букв на такие три класса:

- 1) значения или системы значений, для которых $A > B$,
- 2) " " " " " " " $A = B$,
- 3) " " " " " " " $A < B$.

Иными словами, требуется найти все решения такого сложного соотношения: $A \geq B$.

В частности может случиться, что все допустимые системы значений букв принадлежат к одному какому-нибудь из этих трех классов (так что оба остальные класса оказываются пустыми); тогда имеем дело с тождественным равенством $A \equiv B$ или с тождественным неравенством ($A > B$ или $A < B$), оба другие соотношения оказываются невозможными. Если же только один класс оказывается пустым, то соответствующее ему соотношение (равенство или неравенство) невозможно, а два другие — условны.

Поясним сказанное примерами:

Обычная постановка вопроса:

- 1) Доказать, что $10 - 4\sqrt{3} > 3$.

2) Доказать, что правильная дробь с положительными членами увеличивается, а неправильная дробь с положительными членами уменьшается от увеличения этих членов на одно и то же положительное число.

3) Доказать, что арифметическое среднее двух неравных положительных чисел больше их геометрического среднего.

Наша постановка вопроса:

- 1) Которое из трех соотношений

$$10 - 4\sqrt{3} \geq 3$$

истинно?

2) Как изменится величина дроби с положительными членами, если к ним прибавить по одинаковому положительному числу?

3) Исследовать соотношение между арифметическим и геометрическим средним двух положительных чисел.

3. Предлагаемая новая фузионистская постановка вопроса с равенствами и неравенствами требует введения соответствующих новых терминов и обозначений. Желательно ввести одно общее название и общее символическое обозначение как для соотношения равенства, так и для обоих соотношений неравенства с тем, чтобы само это название или обозначение не пред-

решало заранее, какое именно из названных трех соотношений имеет место в том или другом конкретном случае. Так как речь идет о соотношениях, выражающих результат сопоставления или сравнения двух выражений A и B , то естественнее всего назвать их соотношениями сравнения или просто сравнениями. Итак, под сравнением двух выражений A и B я буду понимать любое из трех соотношений: $A > B$, $A = B$, $A < B$ ¹⁾.

Общим для всех трех случаев обозначением будет служить такое: $A \vee B$ или же такое: $A \wedge B$. Каждая из этих записей имеет в сущности тот же смысл, что и записи: $A \geq B$ или $A \leq B$, но первые менее громоздки и в них отчетливее выступает взаимная обратность, играющая в нашей теории фундаментальную роль.

Сравнения видов $A \vee B$ и $A \wedge B$ называют общими, а сравнения видов $A > B$, $A = B$, $A < B$ — частными.

4. Если оба выражения A и B числовые, то из трех частных сравнений ($A > B$, $A = B$, $A < B$) всегда одно и только одно какое-нибудь истинное, а оба других ложны. В этом случае общее сравнение $A \vee B$ (либо $A \wedge B$) равносильно (т. е. заменяет собою) этому именно частному сравнению.

Например, $5 \vee 7$ равносильно сравнению $5 < 7$; $\sqrt{3} \wedge 1$ имеет смысл сравнения $\sqrt{3} > 1$.

Если же выражения A и B (или хотя одно из них) содержит буквы, то истинный смысл сравнения вида $A \vee B$ (или же вида $A \wedge B$) зависит, вообще говоря, от того, какие именно числовые значения приписаны этим буквам. Поэтому выражение: решить общее сравнение указанного вида означает: установить, когда (т. е. при каких именно значениях входящих букв) будет $A > B$, когда будет $A = B$ и когда будет $A < B$ (это будут, конечно, все остальные допустимые системы значений).

Например: в сравнении

$$2x \vee 1 + x$$

при всяком $x < 1$ знак \vee имеет смысл знака $<$
 " " $x = 1$ " \vee " " $=$
 " " $x > 1$ " \vee " " $>$

Итак, задача решения общего сравнения равносильна задаче решения трех вопросов:

Найти все решения уравнения $A = B$,
 " " условного неравенства $A > B$,
 " " " " $A < B$.

¹⁾ Вряд ли следует опасаться возможности недоразумений из-за того, что слово сравнение имеет в теории чисел совсем другой смысл. Ведь там это слово всегда сопровождается указанием по какому именно модулю берется сравнение. С другой стороны, сравнение в теории чисел обозначается другим символом (\equiv). В математике есть немало случаев употребления одних и тех же слов и символов в различных смыслах. Таковы: приведение (подобных членов и дробей к общему знаменателю); модуль (абсолютная величина, модуль сравнения, в теории эллиптических функций и т. д.); вычет (в теории чисел и в теории функций); знак \equiv (тождество и сравнение по модулю); и т. д.

5. С помощью новых символов наши три задачи можно записать в таком виде:

- $$\begin{array}{ll}
 1) & 10 - 4\sqrt[3]{3} \sqrt{3} ? \\
 2) & \frac{x+z}{y+z} \vee \frac{x}{y} ? \quad (x, y, z > 0), \\
 3) & \frac{x+y}{2} \vee \sqrt{xy} ? \quad (x, y > 0).
 \end{array}$$

(Вместо знака \vee можно было бы написать знак \wedge . Вопросительные знаки указывают, что требуется определить смысл знаков \vee или \wedge .)

В первой задаче требуется установить истинный (единственный) смысл знака \vee . В двух других задачах требуется разбить все возможные системы значений букв x , y или x , y , z на такие три класса, чтобы

для 1-го класса знак \vee имел смысл знака $>$
 „ 2-го „ „ \vee „ „ „ $=$
 „ 3-го „ „ \vee „ „ „ $<$

6. Два неравенства с одинаковым знаком ($>$ или $<$) в обоих условиях называть частными сравнениями одинакового смысла, а два неравенства с разными знаками ($>$ в одном и $<$ в другом) — частными сравнениями противоположного смысла. Два равенства будем называть частными сравнениями как одинакового, так и противоположного смысла, не делая в этом случае различия между этими названиями.

Два сравнения вида $A \vee B$ и $C \vee D$ или же два сравнения вида $A \wedge B$ и $C \wedge D$ будем называть общими сравнениями одинакового смысла, а два сравнения вида $A \vee B$ и $C \wedge D$ — общими сравнениями противоположного смысла¹⁾.

7. Обратимся теперь к вопросу о решении сравнений. Различаем два метода решения сравнений: метод непосредственный и метод преобразования данного сравнения в „равносильное“ ему новое сравнение, решение которого представляется очевидным, либо получается первым, непосредственным, методом, либо, наконец, уже раньше было нам известно.

Первый, непосредственный метод решения сравнения $A \vee B$ заключается в том, что образуем разность $A - B$ и стараемся определить ее знак (в зависимости от числовых значений букв, если таковые входят в A или в B).

Поясним это на решения наших трех задач:

$$1) 10 - 4\sqrt[3]{3} \sqrt{3} ?$$

¹⁾ Терминология, предлагаемая мною в этой статье, представляется мне наиболее естественной и логичной. Но в печатающейся сейчас книжке „Элементы теории неравенств“ мне пришлось воздержаться от введения термина сравнение, заменяя его словами неравенство, понимаемым в широком смысле, охватывающем и случаи равенства. Это, конечно, является насилием над здравым смыслом, хотя и освященным обычаем, и я рассчитываю, что наша математическая общественность выскажется за введение терминов, принятых в этой статье.

Вычислим разность

$$10 - 4\sqrt{3} - 3 = 7 - 4\sqrt{3} = \frac{-4\sqrt{3}(7+4\sqrt{3})}{(7+4\sqrt{3})} = \\ = \frac{49 - 16 \cdot 3}{7+4\sqrt{3}} = \frac{1}{7+4\sqrt{3}} > 0.$$

Итак, разность левой и правой части сравнения оказывается положительным числом. Следовательно, $10 - 4\sqrt{3} > 3$.

$$2) \frac{x+z}{y+z} \sqrt{\frac{x}{y}} \quad (x, y, z > 0).$$

Образум разность:

$$\frac{x+z}{y+z} - \frac{x}{y} = \frac{z(y-x)}{y(y+z)}.$$

Знаменатель последней дроби и множитель z в числителе положительны, поэтому ее знак одинаков со знаком разности $y-x$. Итак:

$$\text{если } y > x, \text{ то } \frac{x+z}{y+z} > \frac{x}{y},$$

$$\text{если } y < x, \text{ „ } \frac{x+z}{y+z} < \frac{x}{y},$$

$$\text{если } y = x, \text{ „ } \frac{x+z}{y+z} = \frac{x}{y}.$$

Другими словами, правильная арифметическая (т. е. с положительными членами) дробь $\frac{x}{y}$ от увеличения ее членов (x и y) на одно и то же (положительное) число, возрастает, а неправильная дробь при тех же обстоятельствах убывает; дробь, равная единице, остается без изменения.

$$3) \frac{x+y}{2} \sqrt{\sqrt{xy}}?$$

Составляем и преобразовываем разность обеих частей:

$$\frac{x+y}{2} - \sqrt{xy} = \frac{1}{2} (x+y-2\sqrt{xy}) = \frac{(x+y-2\sqrt{xy})(x+y+2\sqrt{xy})}{2(x+y+2\sqrt{xy})} = \\ = \frac{(x+y)^2 - 4xy}{2(x+y+2\sqrt{xy})} = \frac{(x-y)^2}{2(x+y+2\sqrt{xy})}.$$

$$\text{Если } x \neq y, \text{ то последняя дробь } > 0, \text{ так что тогда } \frac{x+y}{2} > \sqrt{xy}$$

$$\text{„ } x = y, \text{ „ } \text{ „ } = 0, \text{ „ } \text{ „ } \frac{x+y}{2} = \sqrt{xy}$$

Как видим, при пользовании этим первым методом приходится обыкновенно применять те или другие тождественные преобразования разности $A - B$, чтобы решить вопрос о ее знаке.

8. Обратимся ко второму методу решения сравнений. Чтобы сразу познакомить читателя с сущностью этого метода, я сперва приведу ре-

шение с его помощью тех же трех задач, а потом уже дам обоснование этого метода.

1) Сравнение $10-4\sqrt{3}\sqrt{3}$ —числовое. Следовательно, общий символ \vee заменяет собою один определенный из трех частных символ сравнения $>$, $=$, $<$. Но каков бы ни был этот—неизвестный мне пока—частный символ или истинный смысл заданного сравнения, этот его смысл не изменится, если я перенесу член 3 справа налево с обратным знаком, а член $-4\sqrt{3}$ перенесу слева направо, тоже изменив знак его на обратный. (Эти утверждения будут справедливы в дальнейшем.) Итак, имеем:

$$10-3\vee 4\sqrt{3}, \text{ или } 7\vee 4\sqrt{3}.$$

Обе части этого сравнения положительны; поэтому их квадраты находятся в таком же отношении (равенства или неравенства) друг к другу, как и самые эти числа. Итак, $7^2\vee (4\sqrt{3})^2$ или $49\vee 48$. Но $49 > 48$; следовательно, символ \vee заменяет собою как здесь, так и во всех предыдущих сравнениях, вплоть до исходного сравнения, знак $>$. Итак, $10-4\sqrt{3} > 3$.

$$2) \frac{x+z}{y+z} \vee \frac{x}{y} ?$$

Умножаю обе части на положительное (по условию) число $y(y+z)$. От этого смысл сравнения не может измениться (при каждой отдельной системе положительных числовых значений букв x , y , z):

$$(x+z)y \vee x(y+z), \text{ или } xy+zy \vee xy+xz.$$

Отнимаю по xy от обеих частей. Смысл сравнения сохранится прежний: $xz \vee xz$. Деля почленно на положительное z ; смысл опять сохраняется прежний: $y \vee x$.

Итак, если при данных числовых значениях $x=x_0$, $y=y_0$ имеем $y_0 > x_0$, то при **всяком положительном значении z будет**

$$\frac{x_0+z}{y_0+z} > \frac{x_0}{y_0}.$$

$$\text{Если же } y_0 < x_0, \text{ то } \frac{x_0+z}{y_0+z} < \frac{x_0}{y_0}.$$

$$\text{При } y_0 = x_0 \text{ будет } \frac{x_0+z}{y_0+z} = \frac{x_0}{y_0}.$$

$$3) \frac{x+y}{2} \vee \sqrt{xy} ?$$

Умножаю почленно на 2: $x+y \vee 2\sqrt{xy}$ (знак \vee сохраняет прежний, неизвестный мне, смысл). Возвожу обе части в квадрат, с сохранением смысла знака \vee : $(x+y)^2 \vee 4xy$. Переносу $4xy$ налево: $(x+y)^2-4xy \vee 0$ или $(x-y)^2 \vee 0$ (смысл тот же). Но при $x \neq y$ будет: $x-y \neq 0$, $(x-y)^2 > 0$, а при $x=y$ будет $x-y=0$, $(x-y)^2=0$.

Итак, символ \vee имеет всюду, включая заданное сравнение, смысл знака $>$ при неравных числовых значениях x и y , и знака $=$ при равных значениях x , y .

З а м е ч а н и е. Привожу другой вариант решения первого сравнения для иллюстрации употребления наряду с символом \vee также и символа \wedge .

Перенос члена 10 направо (с минусом) дает:

$$-4\sqrt{3} \vee -7.$$

Если знак \vee означал до сих пор $>$ или $<$, то по умножении обеих частей сравнения на (-1) смысл сравнения должен измениться на противоположный. Если же \vee заменял знак равенства, то и после умножения на (-1) равенство

сохранится или, если угодно, тоже изменит свой смысл на обратный (см. выше, п. 6). Чтобы отметить этот переход сравнения во всех трех случаях в сравнение противоположного смысла, я пишу теперь (по умножении на -1) вместо \vee перевернутый знак \wedge (если бы раньше стояло \wedge , то теперь я написал бы \vee):

$$4 \sqrt{3} \wedge 7.$$

Возвожу обе части в квадрат (сохраняя знак \wedge): $48 \wedge 49$. Но $48 < 49$; следовательно, истинный смысл знака \wedge в этом числовом сравнении есть $<$. Но тогда знак \vee заменяет собою противоположный знак $>$. Итак, $10-4 \sqrt{3} > 7$.

9. При решении наших примеров по второму методу мы заменяли одно сравнение другим, сохраняя знак общего сравнения (\vee или \wedge), либо меняя его на обратный знак, смотря по характеру преобразования и каждый раз мотивируя наше поведение (сохранение или изменение знака сравнения). Чтобы превратить этот второй метод в некоторый алгоритм, так сказать автоматизировать его, мы установим ряд правил преобразования сравнений в другие равносильные им сравнения. Но сперва выясним понятие равносильности двух сравнений.

Всякое частное сравнение (т. е. сравнение вида $A > B$, или $A = B$ или $A < B$) представляет собою некоторое утверждение, суждение, причем, если в A или в B входят буквы, то такое утверждение становится осмысленным лишь при наличии дополнительного указания на то, к каким именно числовым значениям этих букв относится данное утверждение (например: при любых положительных значениях x и y ; при $x < 0$ и $y > 1$ и т. д.). Всякое такое вполне определенное суждение либо истинно, либо ложно [если хотя бы при одной допустимой системе значений переменных оно не оправдывается, то считаем все (общее) утверждение ложным]. Совокупность всех решительно систем числовых значений букв (или переменных), входящих в A и в B , для которых оправдывается данное частное сравнение, можно назвать областью его истинности или же его полным решением.

Если всякий раз, как (т. е. при всякой системе значений, при которой) оправдывается (удовлетворяется) некоторое частное сравнение выражений A и B (например $A > B$), оправдывается также и некоторое другое частное сравнение (вида $C > D$, или $C = D$, или же $C < D$), то говорим, что это второе сравнение (C и D) вытекает из первого (A и B) или же является его следствием. В этом случае область истинности данного сравнения (A и B) входит как часть, могущая иногда совпасть с целым) в область истинности данного сравнения C и D .

Предположим теперь, что

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } A > B \text{ следует } C > D, \\ \text{„ } A = B \quad \text{„} \quad C = D, \\ \text{„ } A < B \quad \text{„} \quad C < D. \end{array} \right\} \quad (\text{H})$$

Тогда и обратно:

$$\left. \begin{array}{l} \text{из } C > D \text{ следует } A > B, \\ \text{„ } C = D \quad \text{„} \quad A = B, \\ \text{„ } C < D \quad \text{„} \quad A < B. \end{array} \right\} \quad (\text{C})$$

В самом деле, возьмем любую систему значений букв, при которой $C > D$. При этих значениях одно из трех частных сравнений A с B ($A > B$, либо $A = B$, либо $A < B$) будет истинно, а два других ложны. Если бы истинным оказалось сравнение $A = B$, то в силу нашего допущения (Н) одновременно было бы истинно сравнение $C = D$; будь истинным сравнение $A < B$, то (для тех же значений) мы имели бы $C < D$. Но по предположению при рассматриваемых значениях букв истинно сравнение $C > D$. Итак, остается одна только альтернатива, а именно: истинно сравнение $A > B$.

Аналогично этому мы доказали бы, что из $C = D$ следует $A = B$, а из $C < D$ вытекает $A < B$.

Итак, действительно из совокупности наших посылок (предположений, гипотез) (Н) вытекает совокупность заключений (следствий, выводов) (С).

Выражения A и C , B и D входят в систему (Н) и (С) симметричным образом. Поэтому из справедливости суждений (С) вытекает, конечно, справедливость утверждений (Н).

Эту взаимную связь систем (Н) и (С) условимся выражать такой фразой: общие сравнения $A \vee B$ и $C \vee D$ равносильны, или: из $A \vee B$ следует $C \vee D$, и обратно, или еще так: наряду с $A \vee B$ имеет место $C \vee D$.

Если же нам дано, что

$$\left. \begin{array}{ll} \text{из } A > B \text{ следует } L < M, \\ \text{„ } A = B \text{ „ } L = M, \\ \text{„ } A < B \text{ „ } L > M, \end{array} \right\} \quad (H')$$

то можно подобно предыдущему показать, что и эти частные сравнения обратимы, т. е. что из системы посылок (Н') следует такая система заключений:

$$\left. \begin{array}{ll} \text{из } L > M \text{ вытекает } A < B, \\ \text{„ } L = M \text{ „ } A = B, \\ \text{„ } L < M \text{ „ } A > B, \end{array} \right\} \quad (C')$$

и обратно: из (С') вытекает (Н'). В этом случае условимся говорить: общее сравнение $A \vee B$ равносильно со сравнением противоположного смысла $L \wedge B$ или же из $A \vee B$ вытекает $L \wedge M$, и обратно, а также: наряду с $A \vee B$ имеет место $L \wedge M$.

10. Доказанную нами взаимную равносильность систем (Н') и (С'), а также систем (Н) и (С) можно установить почти сразу, если стать на такую точку зрения:

Множество S всех, какие только возможны, систем значений букв, входящих в выражение A, B, C, D (или в A, B, L, M) ¹⁾, распадается, по отношению к сравнению $A \vee B$ на такие три класса:

¹⁾ Если некоторые буквы входят в A и B , но не входят ни в C , и ни в D (или ни в L , ни в M) или наоборот (входит в C, D или в L, M , но ни в A , ни в B), то все равно под всеми системами значений букв, о которых говорим в тексте, надо понимать всевозможные комбинации всех значений каждой буквы, хотя бы она входила только в одно из четырех выражений).

- 1) класс K_1 всех систем для которых $A > B$,
- 2) " K_2 " " " " $A = B$,
- 3) " K_3 " " " " $A < B$,

причем каждая система значений букв входит в один и только один из этих трех классов. (Эти классы являются областями истинности соответствующих частных сравнений $A > B$ и т. д.) Будем говорить для краткости, что сравнение $A \vee B$ производит определенную дизъюнкцию всех элементов множества S (на классы K_1 , K_2 и K_3) ¹⁾.

Сравнение $C \vee D$ в свою очередь производит определенную дизъюнкцию элементов того же множества S на классы K'_1 , K'_2 и K'_3 , для элементов которых истинны соответственно частные сравнения $C > D$, $C = D$, $C < D$.

Допущения (H) показывают, что классы K_1 , K_2 , K_3 составляют, каждый, часть (могущую совпасть и со всем целым) соответственно классов K'_1 , K'_2 , K'_3 . Но так как и первые три класса, и вторые три класса исчерпывают одно и то же множество S , то указанное соотношение этих классов возможно только в том случае, если каждый из первых классов целиком совпадает с соответствующим ему классом второй группы. Итак

$$K_1 \equiv K'_1, K_2 \equiv K'_2, K_3 \equiv K'_3.$$

Но отсюда явствует справедливость системы заключений (C), так как они сводятся к утверждению того, что классы K'_1 , K'_2 , K'_3 составляют часть классов K_1 , K_2 , K_3 , в широком понимании слова часть (т. е. могут и сливаться с последними). Но мы ведь как раз и установили факт этого слияния соответствующих классов.

Из посылок (H') выводим подробно предыдущему, что класс K_3'' , для которого $L < M$, совпадает с классом K_1 (областью истинности сравнения $A > B$), класс K_2'' (случай $L = M$) совпадает с классом K_2 (случай $A = B$), а класс K_1'' ($L > M$) одинаков с классом K_3 ($A < B$). Отсюда следует справедливость заключений (C'). Таким образом дизъюнкция, производимая сравнением $L \vee M$, является как бы обращением той дизъюнкции, какую производит сравнение $A \vee B$. Это обстоятельство и должна, по условию, выражать фраза: сравнение $A \vee B$ равносильно сравнению противоположного смысла $L \vee B$.

11. Задача решения сравнения общего вида $A \vee B$ заключается (ср. п. 4) как раз в определении дизъюнкции, производимой этим сравнением в множестве S всех возможных систем значений букв, входящих в A и в B (что касается букв, не входящих ни в A , ни в B , но входящих в новые выражения C , D , то в каждый из классов рассматриваемой дизъюнкции входят всевозможные комбинации их значений с соответствующими значениями букв из A и B). Если известно, что сравнение $C \vee D$ равносильно сравнению $A \vee B$, т. е. производит ту же дизъюнкцию (в том же множестве S), или же что сравнение обращенного типа $L \wedge M$ равносильно с $A \vee B$, т. е. производит обращенную дизъ-

¹⁾ Элементами множества S являются отдельные системы числовых значений букв.

юнкцию, то отсюда следует, что задачи решения как сравнения $A \vee B$, так и сравнений $C \vee D$, $L \wedge M$ вполне равносильны одна другой: решив одну из них, мы тем самым решаем и обе другие.

Второй метод решения сравнения в том и заключается, что мы заменяем сравнение, подлежащее решению, другим, ему равносильным, сравнением (того же или же обращенного типа). Если второе сравнение заменить равносильным ему третьим, это — равносильным с ним четвертым и т. д. вплоть до некоторого n -го сравнения, то это последнее будет равносильно с первым (так как все они дают одну и ту же дизъюнкцию). Если нам удастся решить последнее, n -е, сравнение вида $P \vee Q$ (или $R \wedge T$), то тем самым мы решим и первое $(A \vee B)$. А именно, для всех тех систем значений букв, для которых $P \geq Q$ (или $R \leq T$), будет соответственно $A \geq B$ (соответственно означает: верхнему знаку в одном сравнении соответствует тоже верхний знак в другом, среднему знаку отвечает средний, а нижнему — нижний).

Такую замену одного какого-нибудь общего сравнения другим, ему равносильным, общим сравнением (того же или противоположного смысла или типа) мы и будем называть тождественным преобразованием данного сравнения.

Заметим следующее. Если из какого-нибудь частного сравнения (например $A > B$) следует другое частное сравнение (например $C < D$), то из второго сравнения отнюдь не обязательно следует первое. Так, если $x = y$, то $x^2 = y^2$; но из того, что при некоторых значениях x и y имеем $x^2 = y^2$, не следует, что при тех же значениях $x = y$. Дело в том, что из одного только факта: класс K_1 составляет часть класса K_1' (или класса K_3') или из того, что класс K_2 есть часть K_2' , отнюдь не следует тождество этих классов (K_1 и K_1' и т. д.).

Итак, из истинности следствия ($C < D$) мы не вправе заключать об истинности первоначального положения ($A > B$). Но из ложности следствия (т. е. если известно, что $C \nless D$) мы всегда можем заключить о ложности посылки ($A > B$).

Для доказательства же истинности посылки $A > B$ надо было бы подыскать такое частное сравнение (вида $P > Q$, или $R < S$, или $T = U$), чтобы из его истинности следовала истинность частного сравнения $A > B$, а затем постараться доказать истинность этого нового сравнения.

Это показывает, что метод изучения общих сравнений является несравненно более планомерным, чем метод частных сравнений.

Выяснив вопрос о равносильности двух сравнений, перейдем к установлению ряда правил, позволяющих производить тождественные преобразования общих сравнений. Эти правила представляют собою просто объединение сходных между собою обычных правил решения уравнений и условных неравенств.

12. Правила тождественных преобразований сравнений общего вида. Тождественность двух сравнений будем обозначать знаком \equiv . Буквы A, B, C, \dots , как и раньше, изображают любые числовые или буквенные выражения.

$$\text{I. } \{A \vee B\} \equiv \{B \vee A\}.$$

Это, как мы знаем, — сокращенная запись совокупности таких трех утверждений:

1) Если $A > B$, то $B < A$, и наоборот.

2) „ $A = B$ „ $B = A$ „ „

3) „ $A < B$ „ $B > A$ „ „

(здесь слово если означает: при всех тех числовых значениях букв, при которых...).

Справедливость этих утверждений вытекает из основных свойств соотношений равенства и неравенства.

$$\text{II. } \{A \vee B\} \equiv \{A - B \vee 0\}.$$

Справедливость этого тождества явствует из его смысла:

1) Если $A > B$, то $A - B > 0$.

2) Если $A = B$, то $A - B = 0$.

3) Если $A < B$, то $A - B < 0$.

$$\text{III. } \{A \vee B\} \equiv \{A + C \vee B + C\}.$$

Доказательство. $\{A \vee B\} \equiv \{A - B \vee 0\}$ (преобразование II) $\equiv \{(A + C) - (B + C) \vee 0\} \equiv \{A + C \vee B + C\}$ (преобразование II, читаемое справа налево).

Если в (III) вместо C взять $(-C)$ или же прочесть (III) справа налево, то получим преобразование:

$$\text{III}'. \{A \vee B\} \equiv \{A - C \vee B - C\}.$$

Итак, смысл любого общего сравнения не изменится, если к обеим его частям прибавить или от обеих частей отнять одно и то же произвольное числовое или буквенное выражение; новое сравнение будет равносильно старому

$$\text{IV. } \{A \pm P \vee B\} \equiv \{A \vee B \mp P\}.$$

Это — „правило переноса членов с обратным знаком“. Доказывается путем прибавления к обеим частям по $(-P)$ или по $(+P)$ на основании преобразования (III).

$$\text{V. } \{A \vee B\} \equiv \{-A \wedge -B\}.$$

Доказательство. $\{A \vee B\} \equiv \{-B \vee -A\}$ (по IV) $\equiv \{-A \wedge -B\}$ (по I).

Итак, при перемене знаков всех членов общего сравнения на обратные смысл сравнения переходит в противоположный.

Следствие: $\{A \vee B\} \equiv \{C - A \wedge C - B\}$.

$$\text{VIa. Если } k > 0, \text{ то } \{A \vee 0\} \equiv \{Ak \vee 0\}.$$

$$\text{VIб. Если } k < 0, \text{ то } \{A \vee 0\} \equiv \{Ak \wedge 0\}.$$

Смысл этих преобразований: знак любого числа или численного значения какого-нибудь выражения сохраняется при умножении его на положительное число или на выражение, сохраняющее положительное численное значение, и переходит в противоположный при умножении на отрицательное число или на выражение с отрицательным численным значением.

VIIa. Если $k > 0$, то $\{A \vee B\} \equiv \{Ak \vee Bk\}$.

VIIб. Если $k < 0$, то $\{A \vee B\} \equiv \{Ak \wedge Bk\}$.

Доказательство VIIa. $\{A \vee B\} \equiv \{A - B \vee 0\}$ по (II)

$\equiv \{(A - B)k \vee 0\}$ (по VIa) $\equiv \{Ak - Bk \vee 0\} \equiv \{Ak \vee Bk\}$ (по II).

Читая VIIa и VIIб справа налево либо заменяя k через $\frac{1}{k}$, получаем такие тождественные преобразования:

VIIв. Если $k > 0$, то $\{A \vee B\} \equiv \left\{ \frac{A}{k} \vee \frac{B}{k} \right\}$.

VIIг. Если $k < 0$, то $\{A \vee B\} \equiv \left\{ \frac{A}{k} \wedge \frac{B}{k} \right\}$.

VIII. Если $AB > 0$, то $\{A \vee B\} \equiv \left\{ \frac{1}{A} \wedge \frac{1}{B} \right\}$.

Действительно, $\{A \vee B\} = \left\{ \frac{A}{AB} \vee \frac{B}{AB} \right\} = \left\{ \frac{1}{B} \vee \frac{1}{A} \right\} \equiv \left\{ \frac{1}{A} \wedge \frac{1}{B} \right\}$.

IX. Если $B > 0$, то $\{A \vee B\} \equiv \left\{ \frac{A}{B} \vee 1 \right\}$.

(Доказываем почленным делением на B .) Это преобразование дает новый критерий для сравнения двух чисел A и B , если второе из них положительно. Если отношение $A:B$ больше единицы, то $A > B$; если оно меньше единицы, то $A < B$. Итак, для суждения об относительной величине двух чисел можно пользоваться как разностью их (арифметическим отношением, по старинной терминология), так и частным от деления первого на второе (геометрическим отношением, как говорили еще недавно).

Ха. Если $A > 0$, $B > 0$, то для любого натурального n

$$\{A \vee B\} \equiv \{A^n \vee B^n\}.$$

Действительно, $\{A \vee B\} \equiv \{A - B \vee 0\} \equiv \{(A - B)(A^{n-1} + A^{n-2}B + \dots + B^{n-1}) \vee 0\}$ (так как второй сомножитель положителен)

$$\equiv \{A^n - B^n \vee 0\} \equiv \{A^n \vee B^n\}.$$

Хб. Если $A > 0$, $B > 0$, то при всяком натуральном n

$$\{A \vee B\} \equiv \left\{ \sqrt[n]{A} \vee \sqrt[n]{B} \right\},$$

где корни берутся арифметические.

Это тождество получаем из предыдущего, читая его справа налево.

Хв. Если $A > 0$, $B > 0$, а p, q — натуральные числа, то

$$\{A \vee B\} \equiv \{A^{\frac{p}{q}} \vee B^{\frac{p}{q}}\}.$$

Так как

$$\{A \vee B\} \equiv \{A^{\frac{1}{q}} \vee B^{\frac{1}{q}}\} \quad (\text{по } Xб) \equiv \{A^{\frac{p}{q}} \vee B^{\frac{p}{q}}\} \quad (\text{по } Xа).$$

Хг. Если $A > 0$, $B > 0$, а n — натуральное число, то

$$\{A \vee B\} \equiv \{A^{-n} \wedge B^{-n}\}.$$

(На основании Xа и VIII.)

Хд. Если $A < 0$, $B < 0$, n — натуральное число, то при четном n всегда

$$\{A \vee B\} = \{A^n \wedge B^n\},$$

при нечетном n всегда

$$\{A \vee B\} \equiv \{A^n \vee B^n\}$$

(доказываем, опираясь на V, Xа, V).

Предлагаем читателю самому выяснить, какими из доказанных нами тождественных преобразований мы пользовались при решении по второму методу наших трех задач (п. 8).

13. Решим еще несколько сравнений, пользуясь этими тождественными преобразованиями.

$$1) \sqrt{2} + \sqrt{3} \vee 3?$$

Согласно Xа это сравнение равносильно такому: $(\sqrt{2} + \sqrt{3})^2 \vee 3^2$, или $5 + 2\sqrt{6} \vee 9$, которое в свою очередь равносильно (по IV) такому: $2\sqrt{6} \vee 4$. Далее, согласно VIIб: $\sqrt{6} \vee 2$, и по Xа: $6 \vee 4$.

Но $6 > 4$; следовательно, символ \vee означает „больше“; поэтому $\sqrt{2} + \sqrt{3} > 3$

$$2) 2 \vee 10 - 3 \sqrt{7}?$$

Последовательно преобразовываем это сравнение в такие равносильные с ним сравнения: — $8 \vee -3 \sqrt{7}$; $8 \wedge 3 \sqrt{7}$; $64 \wedge 63$.

Итак, \wedge означает $>$; поэтому \vee означает $<$, так что $2 < 10 - 3 \sqrt{7}$.

$$3) \sqrt[3]{5} \vee \sqrt{2} + 0,3?$$

Возвожу в куб: $5 \vee 2,27 \sqrt{2} + 1,827$, или $3,173 \vee 2,27 \sqrt{2}$. Отсюда $3,173^2 \vee 2,27^2 \cdot 2$.

Вычисляю с точностью до 0,01: $10,07 \vee 10,30$ (вместо точного результата: $10,067929 \vee 10,3058$).

Из этого приближенного сравнения видно, что \vee заменяет знак $<$. Итак;

$$\sqrt[3]{5} < \sqrt{2} + 0,3.$$

$$4) 5 - x \vee 1 + \frac{x}{3}.$$

Умножение на 3 превращает это буквенное общее сравнение в такое равносильное с ним: $15 - 3x \vee 3 + x$.

Далее имеем: $15 - 3 \vee x + 3x$; $12 \vee 4x$; $3 \vee x$, или, наконец, $x \wedge 3$.

Итак, предложенное сравнение равносильно с таким: $x \wedge 3$. Это означает следующее:

если $x > 3$, то $5 - x < 1 + \frac{x}{3}$, и наоборот,

„ $x = 3$, „ $5 - x = 1 + \frac{x}{3}$, „ „

„ $x < 3$, „ $5 - x > 1 + \frac{x}{3}$, „ „

Отметим, что благодаря употреблению символов общих сравнений \vee и \wedge мы здесь одновременно решили два условных неравенства и одно уравнение столь же просто и скоро, как обычно решают каждое из них в отдельности.

14. В заключение применим метод общих сравнений к решению такой геометрической задачи:

Как изменяется площадь прямоугольника с постоянным периметром $4a$ при изменении длины его более короткой стороны?

Обозначим более короткие стороны двух прямоугольников рассматриваемого класса через x и y , причем пусть $x < y$. Тогда $x < y \leq a$. Вторые стороны наших прямоугольников равны $2a - x$, $2a - y$, а их площади равны

$$S_1 = x(2a - x); \quad S_2 = y(2a - y).$$

Вопрос сводится к решению сравнения $S_1 \vee S_2$, или $x(2a - x) \vee y(2a - y)$.

Преобразовываем его в равносильные сравнения: $2ax - x^2 \vee 2ay - y^2$; $2ax - 2ay \vee x^2 - y^2$; $2a(x - y) \vee (x + y)(x - y)$; $2a \wedge x + y$ (так как по условию $x - y < 0$). Но из неравенств: $x < a$, $y \leq a$ следует $x + y < 2a$.

Итак, символ \wedge означает $>$, так что сравнение $2a \wedge x + y$ при всех допустимых значениях x и y представляет собою тождество: $2a > x + y$. Но в таком случае в сравнении (A) знак \vee означает, тоже при всех допустимых значениях x и y , „меньше“.

Итак, при приближении меньшей стороны прямоугольника с периметром $4a$ к a его площадь увеличивается. В частности случай $x < y = a$ дает такой вывод: всякий прямоугольник с неравными сторонами меньше изопериметрического с ним квадрата.

Употребление общих сравнений и их символики оказывается полезным также и при решении сравнений высших степеней и систем сравнений, в особенности если одновременно пользоваться графическими иллюстрациями и соображениями (помощью метода координат). Детальные относящиеся сюда указания имеются в упомянутой моей книжке „Элементы теории неравенства“.

БИБЛИОГРАФИЯ

Г. Радемахер и О. Теплиц, Числа и фигуры. Перевод с немецкого В. И. Контовт. Главная редакция научно-популярной и юношеской литературы, Москва—Ленинград 1935, тираж 15 000.

Если учитель музыки заставляет своих учеников разучивать только гаммы и экзерсисы, каждый скажет, что такой учитель плох. Он не прививает своим ученикам музыкального вкуса и потому его ученики не могут сделаться истинными музыкантами. Как ни странно, эта система обучения, недостатки которой ясны всем, пока дело касается музыки, не встречает никаких возражений в области математики. Ведь, если оставить в стороне отдельные исключения, изучение математики в школе сводится к заучиванию ряда теорем и правил и их доказательств и к решению ряда стандартных задач. Весь материал, прорабатываемый в школе, давно отлит в определенные формы, и за рамки этого материала учитель никогда или почти никогда не выходит. Упор делается главным образом на память ученика.

От такой постановки дела особенно страдают наиболее сильные и талантливые ученики. Их способности не получают должного развития; их запросы не находят удовлетворения в школьной науке, и они скоро к ней охладевают. Несомненно, с этими одаренными учениками нужна особая работа, которую должны вести школьные математические кружки.

Но здесь вопрос упирается в полное отсутствие литературы. Нет надлежащей литературы для учителя, нет подходящей литературы для учеников. Насколько мне известно, все школьные кружки строят свою работу на занимательных книжках Я. И. Перельмана. Мы не думаем отрицать достоинств этих книжек, но нам кажется, что они вовсе не подходят для учеников старших классов. Несмотря на их занимательность они остаются все в тех же школьных рамках, не дают юноше оглядеться вокруг и хотя бы одним глазом посмотреть на настоящую науку.

Мы хотим обратить внимание читателей на недавно вышедшую книжку Радемахера и Теплица, которая отчасти заполняет указанный пробел. Книжка содержит 27 небольших прекрасно написанных очерков, каждый из которых может глубоко заинтересовать юного математика. Темы очерков выбраны с большим вкусом, и многие из этих очерков будут прочитаны с большим интересом даже зрелыми математиками, несмотря на совершенную элементарность изложения. Некоторые из них написаны в духе маленьких научных исследований, что, конечно, должно побудить юных читателей к самостоятельным изысканиям, результаты которых, быть может, не будут велики, — но ведь для того, чтобы заинтересоваться наукой, нужно лишь испытать радость творчества. Математика привлекает к себе не тех, кто, обладая хорошей памятью, отлично запоминает формулы, а тех, кто за этими формулами видит красоту логических построений, кто живо ощущает красоту геометрических форм. „Геометра, как говорил Клебш, создает радость формы“. И вот эту-то радость формы дают почувствовать в своей маленькой книжке Радемахер и Теплиц.

Мы не намерены здесь разбирать содержание книжки в деталях, отмечать отдельные ее достоинства и недостатки. Нам хотелось лишь поделиться с читателями своею радостью по поводу выхода в свет прекрасной научно-популярной книжки.

Робета

ЗАДАЧИ

Решения нижеследующих задач предлагается присылать по адресу: Москва, Центр, Б. Комсомольский 6, ОНТИ. Главная редакция общетехнической литературы и номографии. Редакция „Математическое просвещение“.

122. Найти два треугольных числа, полусумма которых есть опять треугольное число $\left[\text{треугольным числом называется целое число вида } \frac{1}{2} a(a+1) \right]$.

123. Прямой трехгранный угол $OXYZ$ пересечен плоскостью. В сечении образовался треугольник ABC . Доказать, что

$$\operatorname{ctg} A : \operatorname{ctg} B : \operatorname{ctg} C = OA^2 : OB^2 : OC^2,$$

где A, B, C — углы треугольника ABC .

124. Решить уравнение

$$x^6 - 6x^5 + 25x^4 - 58x^3 + 102x^2 - 96x + 72 = 0.$$

125. Найти соотношение, связывающее сумму двугранных углов тетраэдра с суммой трехгранных его углов.

126. Три источника света силой в 2, 4 и 5 единиц расположены в точках плоскости с координатами $(0,3)$, $(4,5)$ и $(9,0)$. Найти в этой плоскости точку, одинаково освещенную всеми тремя источниками.

127. Показать, что

$$\frac{1}{1 \cdot 3 \cdot 5} + \frac{1}{7 \cdot 9 \cdot 11} + \frac{1}{13 \cdot 15 \cdot 17} + \dots = \frac{1}{16} \ln 3.$$

РЕШЕНИЯ ЗАДАЧ

74. Построить равнобедренный треугольник по высоте и медиане опущенным на одну из равных сторон.

Строим прямоугольный треугольник ADE , в котором катет AD равен заданной высоте, а гипотенуза AE — медиане искомого треугольника. На медиане AE берем точку F , делящую ее в отношении $AF:FE = 2:1$, и из F описываем дугу радиусом $FB = AF$. Точка B есть точка пересечения этой дуги с прямой ED . Далее, от точки E откладываем отрезок $EC = EB$. Треугольник ABC — искомый.

(Задача не всегда имеет решение, т. к. полученный треугольник не всегда будет равнобедренным. *Ред.*)

Л. М. Шмугленсон (Винница)

75. Международная комиссия состоит из 11 представителей различных стран. Материалы, над которыми работает комиссия, хранятся в сейфе. Сколько замков должен иметь сейф и сколькими ключами следует снабдить каждого члена комиссии, чтобы доступ к материалам был возможен только тогда, когда собираются любые шесть членов комиссии, но не меньше.

Обобщить задачу.

Пусть собрались 5 членов комиссии. По условию задачи им нехватает ключа по крайней мере к одному замку, причем ключ к этому замку имеется у любого из шести остальных членов. Так как это происходит при любой комбинации из 5 членов, то общее число замков равно числу сочетаний из 11 по 5:

$$\frac{11 \cdot 10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot 4 \cdot 5} = 462.$$

Так как к каждому замку имеется шесть ключей, то общее число ключей равно:

$$462 \cdot 6 = 2772.$$

Каждый член комиссии будет иметь:

$$2772 : 11 = 252$$

ключей.

Следует отметить, что такой порядок открывания сейфа практически неосуществим, так как при нем на открывание сейфа уходил бы почти целый день.

Если число членов комиссии равно m , а число членов, необходимых для того, чтобы можно было открыть сейф, n , то число замков равно:

$$\frac{m(m-1) \cdot \dots \cdot (m-n+2)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot n-1}.$$

Число ключей у каждого члена комиссии равно:

$$\frac{(m-1)(m-2) \cdot \dots \cdot (m-n+1)}{1 \cdot 2 \cdot 3 \cdot \dots \cdot (n-1)}.$$

Ч. Ч. Домбровский (Витебск)

76. Решить уравнение:

$$1!3!5! \dots (2x-1)! = \left[\frac{x(x+1)}{2} \right]!$$

Нетрудно убедиться непосредственной подстановкой, что решениями уравнения являются $x=1, 2, 3, 4$. (Никто из решавших задачу не дал убедительных доказательств того, что уравнение не имеет других решений. *Ред.*)

С. В. Болдырев (г. Киров)

77. Точка D — ортоцентр (точка пересечения высот) тупоугольного треугольника ABC . Доказать, что каждая из четырех точек A, B, C, D является в этом случае ортоцентром треугольника, образованного тремя остальными точками.

Пусть в треугольнике ABC проведены высоты AA_1, BB_1, CC_1 , пересекающиеся в точке D . Рассмотрим треугольник ADB . Высотами в нем будут: DC_1 (так как $CC_1 \perp AB$), BA_1 (так как $BC \perp AA_1$), AB_1 (так как $AC \perp B_1B$). Эти три прямые пересекаются в точке C , которая, следовательно, является ортоцентром треугольника ADB .

Подобным же образом рассматриваем треугольники ADC и BDC .

С. В. Болдырев (г. Киров)

78. Найти сумму ряда:

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + [n(n+1)]^3 + [n(2n+1)]^2 + \dots + [n(n^2+1)]^2.$$

Мы будем предполагать известными формулы:

$$1 + 2 + 3 + \dots + n = \frac{n(n+1)}{2},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n(2n+1)(n+1)}{6},$$

$$1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 = \frac{n^2(n+1)^2}{4}.$$

Имеем:

$$\begin{aligned}
 & 1^3 + 2^3 + 3^3 + \dots + n^3 + [n(n+1)]^3 + [n(2n+1)]^3 + \dots + [n(n^2+1)]^3 = \\
 & = \frac{n^2(n+1)^3}{4} + n^3[(n+1)^3 + (2n+1)^3 + \dots + (n^2+1)^3] = \\
 & = \frac{n^2(n+1)^3}{4} + n^3[n^3 + 2^3n^3 + \dots + n^3n^3 + 3n^3 + 3 \cdot 2^3n^3 + \dots \\
 & \dots + 3n^3n^3 + 3n + 3 \cdot 2n + \dots + 3nm + 1 + 1 + \dots + 1] = \\
 & = \frac{n^2(n+1)^3}{4} + n^3[n^3(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + 3n^3(1^3 + 2^3 + \dots + n^3) + \\
 & + 3n(1 + 2 + \dots + n) + n] = \frac{n^2(n+1)^3}{4} + \frac{n^6(n+1)^3}{4} + \\
 & + \frac{3n^6(n+1)(2n+1)}{6} + \frac{3n^5(n+1)}{2} + n^4 = \\
 & = \frac{n^2}{4} [(n+1)^3 + n^3(n+1)^3 + 2n^4(n+1)(2n+1) + \\
 & + 6n^3(n+1) + 4n^2] = \frac{n^2}{4} [n^3 + 2n + 1 + n^3 + 2n^7 + \\
 & + n^6 + 4n^6 + 4n^5 + 2n^5 + 2n^4 + 6n^4 + 6n^3 + 4n^2] = \\
 & = \frac{n^2}{4} [(n^6 + n^6) + 2(n^7 + n^5) + 4(n^6 + n^4) + 4(n^5 + n^3) + \\
 & + 4(n^4 + n^2) + 2(n^3 + n) + (n^2 + 1)] = \\
 & = \frac{n^2}{4} (n^2 + 1)(n^6 + 2n^5 + 4n^4 + 4n^3 + 4n^2 + 2n + 1) = \\
 & = \frac{n^2}{2} (n^2 + 1)[(n^6 + n^4) + 2(n^5 + n^3) + 3(n^4 + n^2) + \\
 & + 2(n^3 + n) + (n^2 + 1)] = \frac{n^2(n^2+1)^3}{4} [n^4 + 2n^3 + \\
 & + 3n^2 + 2n + 1] = \frac{n^2(n^2+1)^3}{4} [(n^4 + n^3 + n^2) + \\
 & + (n^3 + n^2 + n) + (n^2 + n + 1)] = \frac{n^2(n^2+1)^3}{4} (n^2 + n + 1)(n^2 + n + 1) = \\
 & = \left[\frac{n(n^2+1)(n^2+n+1)}{2} \right]^2.
 \end{aligned}$$

Л. М. Шмуклерсон (Винница)

79. К окружности $x^2 + y^2 = a^2$ проводят всевозможные касательные и отрезки их, заключенные между координатными осями, делят в отношении $m:n$. Найти уравнение геометрического места точек деления.

Уравнение касательной к окружности в точке x_1, y_1 :

$$x_1x + y_1y = a^2.$$

Точки пересечения касательной с осями:

$$A\left(0, \frac{a^2}{y_1}\right); \quad B\left(\frac{a^2}{x_1}, 0\right).$$

Координаты точки, делящей отрезок AB в отношении $m:n$:

$$x = \frac{ma^2}{(m+n)x_1}; \quad y = \frac{na^2}{(m+n)y_1}.$$

Отсюда

$$x_1 = \frac{ma^2}{(m+n)x}, \quad y_1 = \frac{na^2}{(m+n)y},$$

и, подставляя в $x_1^2 + y_1^2 = a^2$, получаем:

$$\frac{m^2}{x^2} + \frac{n^2}{y^2} = \frac{(m+n)^2}{a^2}.$$

Это и есть уравнение искомой кривой.

С. И. Горо до в (Ленинград)

80. Показать, что оси парабол, имеющих общий фокус и проходящих через две данные точки, параллельны асимптотам гиперболы, которая проходит через общий фокус и фокусам которой являются данные точки.

Даем синтетическое решение задачи.

Пусть A и B — общие точки парабол, и F — их общий фокус. Директриса какой-либо параболы пучка должна отстоять от точки A на расстоянии AF и от точки B на расстоянии BF ; следовательно, должна быть общей касательной к окружности с центрами в A и B и с радиусами AF и BF соответственно. Таких касательных две; следовательно, директрисы парабол могут иметь два положения. Опустив из точки F перпендикуляры FC и FD на эти касательные, получим два направления осей парабол.

Отыщем теперь направления асимптот гиперболы. Пусть A_1 и B_1 и соответственно A_2 и B_2 — основания перпендикуляров, опущенных на касательные из точек A и B . Так как A и B — фокусы гиперболы, то $AB = 2c$. Далее, яроведем $AE \parallel A_1B_1$. (Точка E — точка пересечения этой прямой с BB_1 .) Тогда $BE = BB_1 - AA_1 = BF - AF = 2a$.

Как известно, асимптоты наклонены к действительной оси под углом α , для которого $\cos \alpha = \frac{a}{c}$. Мы же имеем $\cos ABE = \frac{2a}{2c} = \frac{a}{c}$; следовательно, $ABE = \alpha$. Итак, BB_1 есть направление одной асимптоты. Подобным же образом можно показать, что BB_2 есть направление другой асимптоты. Но $BB_1 \parallel FC$, $BB_2 \parallel FD$; следовательно, направления асимптот гиперболы совпадают с направлениями осей парабол.

СОДЕРЖАНИЕ

Региомонтан. О законе синусов для сферического треугольника . .	3
С. И. Зетель. О свойствах правильных многоугольников	7
И. В. Арнольд. Об одном свойстве числа $\tau = \sqrt{\frac{5+1}{2}}$	16
С. Е. Аршон. Решение одной комбинаторной задачи	24
Н. А. Извольский. О параболах, вписанных в треугольник	29
С. Е. Вихман. Релятивное интегрирование	39
М. С. Бритман. О расходимости гармонического ряда	49
Г. А. Ключарев. Один простой способ геометрического построения параболы второго порядка и связанное с ним построение параболы Нейля	51
Д. А. Крыжановский. К теории решения уравнений и неравенств . .	53
Библиография	67
Задачи	68
Решение задач	—

ОПЕЧАТКИ

Страница	Строка	Напечатано	Следует читать
8	21 снизу	$= \frac{x}{y}$	$= \frac{y}{x}$
18	15 снизу	$[\alpha\tau] + <\beta$	$[\alpha\tau] + 1 < \beta$
25	7 снизу	$m_n - 1$	$m_{n-1} - 1$